



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,**  
**FISICHE E NATURALI**

*Corso di Laurea Triennale in Fisica*

**Determinazione simultanea della costante di accoppiamento  
forte  $\alpha_s$  e della struttura partonica del nucleone.**

*Relatore Interno:* Prof. S. Forte

*Correlatore :* Dott. J. Rojo

Tesi di Laurea di  
Simone Lionetti  
matr. 724668

Anno Accademico 2009-2010

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 La cromodinamica quantistica</b>	<b>1</b>
1.1 Esperimenti di urto profondamente anelastico . . . . .	1
1.1.1 Definizione e cinematica . . . . .	1
1.1.2 Le funzioni di struttura e lo scaling . . . . .	2
1.2 Il modello a partoni . . . . .	3
1.2.1 Formulazione . . . . .	3
1.2.2 Quarks e gluoni . . . . .	4
1.3 L'interazione forte . . . . .	5
1.3.1 La carica di colore . . . . .	5
1.3.2 Libertà asintotica e confinamento . . . . .	5
1.3.3 Fattorizzazione e violazioni di scaling . . . . .	7
<b>2 NNPDF</b>	<b>9</b>
2.1 A proposito di NNPDF . . . . .	9
2.1.1 Il campionamento Monte Carlo . . . . .	9
2.1.2 Parametrizzazione delle distribuzioni partoniche . . . . .	10
2.1.3 Addestramento delle reti neurali . . . . .	11
2.1.4 Criterio di arresto . . . . .	12
2.1.5 La misura di probabilità nello spazio delle PDF . . . . .	14
2.2 Panoramica sui dati utilizzati . . . . .	14
<b>3 Risultati</b>	<b>17</b>
3.1 Il problema delle fluttuazioni statistiche . . . . .	17
3.2 Il metodo dei tre punti . . . . .	19
3.2.1 Motivazione e descrizione . . . . .	19
3.2.2 Risultati delle simulazioni per i metodi . . . . .	21
3.3 NNPDF 1.2 e 2.0 a confronto . . . . .	22
3.3.1 I risultati di NNPDF 1.2 . . . . .	22
3.3.2 Fit con NNPDF 2.0 DIS-only . . . . .	25
3.4 Determinazione di $\alpha_s(m_Z^2)$ . . . . .	28
3.4.1 Variazione dei punti con $N_{rep}$ . . . . .	28

---

3.4.2	Stima di $\alpha_s$ con NNPDF 2.0, tutti gli esperimenti . . . . .	31
<b>A</b>	<b>Studio degli stimatori</b>	<b>38</b>
A.1	Osservazioni generali . . . . .	38
A.2	Analisi degli stimatori per i minimi . . . . .	39
A.2.1	Primo caso: punti centrati distribuiti in modo uniforme. . . . .	39
A.2.2	Secondo caso: punti centrati distribuiti in modo non uniforme. . . . .	40
A.2.3	Terzo caso: punti non centrati distribuiti in modo uniforme. . . . .	41

# Introduzione

La cromodinamica quantistica o QCD è una teoria quantistica di campo il cui obiettivo è descrivere i fenomeni che coinvolgono l'interazione forte. Nel limite di alte energie, l'unico parametro di questa teoria che necessita di essere determinato tramite osservazioni sperimentali è la costante di accoppiamento  $\alpha_s$  ad una scala energetica di riferimento, che viene convenzionalmente scelta in corrispondenza della massa della particella  $Z$ . Le stime correnti di  $\alpha_s(m_Z^2)$ , sintetizzate schematicamente in figura 1, vengono ricavate da diversi tipi di esperienze. I principali problemi

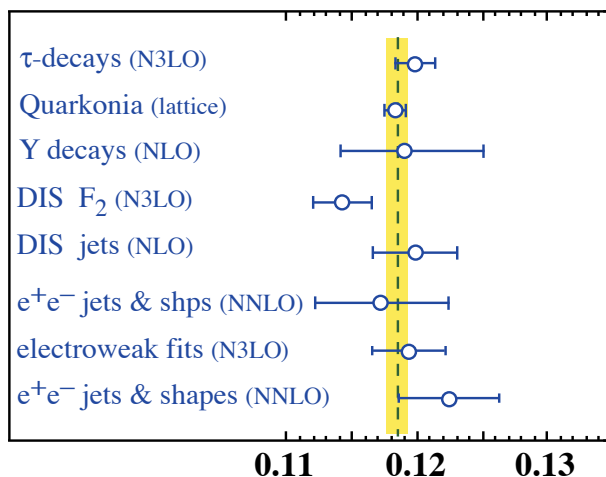


Figura 1: sintesi delle stime di  $\alpha_s$ .

di queste valutazioni sono la frequente mancanza di autoconsistenza interna degli insiemi di dati dai quali esse vengono ricavate, le loro incertezze sistematiche e le assunzioni teoriche effettuate nel corso delle stime, che sovente pesano sui risultati finali più delle altre fonti di errore. Questo è il motivo per cui ad oggi non vi è un accordo generale sull'incertezza da attribuire ad  $\alpha_s(m_Z^2)$ . Poiché la costante di accoppiamento forte viene utilizzata per fare previsioni sulle osservabili che sono oggetto di misura negli esperimenti ai collider adronici, quale ad esempio la sezione d'urto per la produzione del bosone di Higgs ad LHC, la situazione appena esposta rischia di inficiare in parte le potenzialità di queste esperienze.

Con questo lavoro ci proponiamo di estrarre da un fit partonico globale una stima di  $\alpha_s(m_Z^2)$  che ha le sue radici in esperimenti di urto profondamente inelastico, Drell-Yan, produzione di bosone vettore e di jet adronici.

Nel capitolo 1 viene richiamata una parte delle osservazioni teoriche e sperimentali che hanno dato avvio allo studio dell'interazione forte insieme ad alcuni concetti chiave di QCD. Nel capitolo 2 è sintetizzata la strategia di estrazione delle distribuzioni partoniche dai dati sperimentali adottata ai fini di questo lavoro; in questa sezione è inoltre presente una breve panoramica sulle sorgenti di informazione utilizzate. Nella terza ed ultima sezione viene definita la procedura per estrarre dal fit partonico globale la migliore stima della costante di accoppiamento forte, ed infine vengono presentati e discussi i risultati ottenuti a partire da diversi insiemi di dati.

# Capitolo 1

## La cromodinamica quantistica

### 1.1 Esperimenti di urto profondamente anelastico

#### 1.1.1 Definizione e cinematica

Nello sviluppo della teoria delle interazioni forti, un ruolo molto importante è stato svolto dagli esperimenti detti di urto profondamente anelastico, che spesso per brevità si preferisce indicare mediante la sigla DIS dall'inglese *deep inelastic scattering*. Questi eventi, che coinvolgono la collisione di un leptone con un nucleone mediante lo scambio di un bosone virtuale intermedio, sono caratterizzati da un valore grande del modulo del quadriimpulso trasferito durante il processo. Più precisamente si può interpretare un generico evento di scattering leptone-nucleone come l'emissione da parte del primo di un bosone virtuale di quadriimpulso

$$q = k_i - k_f, \quad (1.1)$$

dove  $k_i$  e  $k_f$  sono i quadrimomenti iniziale e finale del leptone considerato, ed il successivo assorbimento di questo bosone da parte del nucleone. Questa situazione è rappresentata nel diagramma di Feynman riportato in figura 1.1.

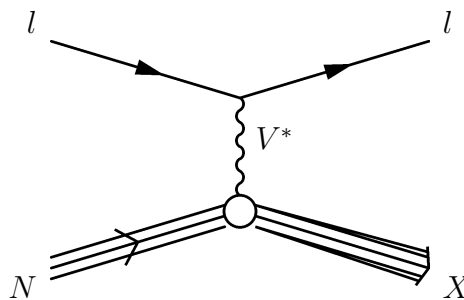


Figura 1.1: il diagramma di Feynman per un evento di DIS.

Solitamente si definisce la grandezza positiva

$$Q^2 \equiv -q^2, \quad (1.2)$$

che rappresenta il quadrato della massa della particella virtuale scambiata, e si indica con  $\nu$  la perdita di energia del leptone, ovvero

$$k_i = (E_i, \vec{k}_i), \quad k_f = (E_f, \vec{k}_f), \quad \nu \equiv E_i - E_f. \quad (1.3)$$

Concentrando l'attenzione sull'assorbimento del bosone vettore da parte del nucleone, rappresentato dal vertice inferiore nel diagramma, detto  $p$  il quadriimpulso iniziale del nucleone e chiamata  $P$  la somma di tutti i quadriimpulsi delle particelle  $X$  emergenti, si ha per la conservazione del quadriimpulso

$$P^2 = (p + q)^2 = M_N^2 + 2p \cdot q + q^2, \quad (1.4)$$

dove  $M_N$  è la massa del nucleone. Nel sistema di riferimento in cui il bersaglio è fisso quindi

$$\begin{cases} p = (M_N, \vec{0}) \\ q = (\nu, \vec{k}_i - \vec{k}_f) \end{cases} \Rightarrow W^2 \equiv P^2 = M_N^2 + 2M_N\nu - Q^2; \quad (1.5)$$

la grandezza  $W$  prende il nome di massa invariante del sistema di adroni (particelle fortemente interagenti) emergenti  $X$  e lo descrive collettivamente.

Impiegando le quantità introdotte, un urto elastico è individuato dalla condizione

$$W = M_N \Rightarrow 2M_N\nu = Q^2, \quad (1.6)$$

mentre per lo scattering anelastico si ha

$$W > M_N \Rightarrow 2M_N\nu > Q^2, \quad (1.7)$$

poiché nello stato finale non vi è soltanto il protone entrante. Parlare di DIS, invece, significa considerare un evento molto anelastico

$$W^2 \gg M_N^2 \quad (1.8)$$

in cui la distanza  $\Delta x$  risolta da  $V^*$  è sufficientemente piccola da vedere la struttura profonda del nucleone, cioè

$$\Delta x \approx \frac{1}{Q} \ll \frac{1}{M_N} \Rightarrow Q^2 \gg M_N^2. \quad (1.9)$$

### 1.1.2 Le funzioni di struttura e lo scaling

Si consideri ora come osservabile la sezione d'urto, differenziale in  $Q^2$  e in  $\nu$ , parametrizzata da due variabili cinematiche indipendenti. Poiché i meccanismi dell'interazione elettrodebole sono noti, il fattore della sezione d'urto che deriva dall'emissione del bosone vettore  $V^*$  da parte del leptone è calcolabile; tuttavia lo stesso non si può dire per il termine che coinvolge il nucleone.

Infatti esperimenti di urto elettrone-protone analoghi a quello appena descritto ma che avvengono mediante meccanismi elastici mostrano che il nucleone è un oggetto che ha una distribuzione di carica con un'estensione spaziale ben definita, corrispondente ad un raggio di circa 0.8 Fm. Siccome la struttura interna del nucleone costituisce un'incognita del problema, si usa parametrizzare la sezione d'urto degli esperimenti DIS mediante delle funzioni dette appunto di struttura in cui vengono immagazzinate le informazioni empiriche sulla composizione del nucleone stesso.

Ad esempio, considerando l'urto elettromagnetico tra un nucleone ed un leptone carico, si dimostra che la più generale espressione della sezione d'urto è

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{1}{M_N} \frac{E_f}{E_i} \left[ 2F_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{M_N}{\nu} F_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (1.10)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di scattering del leptone. D'ora in avanti faremo riferimento allo scattering elettrone-protone, in cui il processo dominante è lo scambio di un singolo fotone virtuale, tenendo conto che i risultati possono essere generalizzati a meccanismi di urto leptone-nucleone qualsiasi.

Le funzioni di struttura  $F_1(Q^2, \nu)$  e  $F_2(Q^2, \nu)$  determinate mediante esperimenti DIS esibiscono una dipendenza da  $Q^2$  e  $\nu$  che presenta una caratteristica particolare: fissato il valore della variabile adimensionale

$$x = \frac{Q^2}{2M_N\nu}, \quad (1.11)$$

le variazioni di  $F_1$  ed  $F_2$  con  $Q^2$  (o equivalentemente  $\nu$ ) sono molto deboli, in particolare molto più deboli della dipendenza esponenziale oppure a potenza osservata negli esperimenti di urto elastico. Questo comportamento, che va sotto il nome di *scaling*, venne ipotizzato da Bjorken per spiegare i dati sperimentali ed è attualmente visto come conseguenza della teoria delle interazioni forti al più basso ordine perturbativo.

## 1.2 Il modello a partoni

### 1.2.1 Formulazione

Nel caso dello scattering elastico la sezione d'urto per l'interazione elettromagnetica elettrone-protone è una funzione che diminuisce molto rapidamente all'aumentare di  $Q^2$ ; se si considera che i fattori di forma con cui essa viene parametrizzata possono essere interpretati come la trasformata di Fourier della distribuzione di carica del protone, questo comportamento è indice del fatto che esso ha dimensione finita. L'ipotesi di *scaling*, invece, asserisce che le funzioni di struttura non dipendono dall'impulso trasferito: questa caratteristica suggerisce l'esistenza di costituenti puntiformi all'interno del nucleone. Mentre in un urto elastico la distanza risolta dal bosone è grande ed esso interagisce coerentemente con il nucleone nel suo complesso, negli esperimenti DIS alla sonda è associata una lunghezza d'onda molto

minore; la particella virtuale riesce quindi a discernere la struttura del bersaglio e collide in modo non coerente con un singolo componente rivelando che esso è privo di dimensioni.

Questa situazione può essere descritta mediante il modello a partoni, attualmente ottenuto al più basso ordine perturbativo della QCD nel limite  $Q^2 \rightarrow \infty$ . A tal fine si suppone che all'interno del nucleone vi sia un numero imprecisato di particelle prive di dimensioni dette partoni e che ciascuna di esse abbia una probabilità  $f_i(x_B)$  di portare una frazione  $x_B$  del quadriimpulso del nucleone. Si assume inoltre che le masse ed i momenti trasversi di questi costituenti siano piccoli, cosa che si verifica sempre nel limite di alte energie. Detta  $M_j$  la massa del partone colpito  $j$  si ha

$$M_j = \sqrt{(x_B P)^2} = x_B M_N, \quad (1.12)$$

e poiché l'urto bosone-partone è elastico, nel limite in cui è valida l'ipotesi di scaling,

$$2x_B M_N \nu = Q^2 \Rightarrow x = x_B; \quad (1.13)$$

la variabile  $x$  può cioè essere interpretata come la frazione dell'impulso totale portata dal partone colpito. Se si ipotizza che i contributi dovuti agli urti con i singoli costituenti si sommino incoerentemente, cioè senza interferenza, note le sezioni d'urto per le particelle puntiformi è possibile calcolare quella del nucleone; al termine del procedimento, che qui non viene riportato per brevità, paragonando quanto trovato con la 1.10 si trova

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i q_i^2 f_i(x), \quad F_2(x) = x \sum_i q_i^2 f_i(x), \quad (1.14)$$

dove con  $q_i$  è stata indicata la carica dell' $i$ -esimo partone.

Le funzioni  $f_i(x)$ , che devono essere determinate sperimentalmente, prendono il nome di distribuzioni partoniche e vengono spesso indicate con l'acronimo PDF, che sta per *parton distribution functions*.

### 1.2.2 Quarks e gluoni

Nel momento in cui il modello a partoni venne applicato con successo da parte di R. Feynman, fu naturale metterlo in relazione con il modello a quark che era stato sviluppato da M. Gell-Mann per classificare le particelle allora note. Esso prevede che all'interno degli adroni sia presente un certo numero di oggetti elementari detti quarks che ne determinano i numeri quantici. In base ad un gruppo di simmetria  $SU(3)_F$  comprendente tre tipi, o sapori, di quarks Gell-Mann era riuscito a classificare in multipletti i barioni ed i mesoni allora noti.

Supponendo che i partoni abbiano le proprietà dei quarks, ad esempio identificando le  $q_i$  con le cariche elettriche dei quarks ed assumendo che il protone contenga due quarks *up* ed un quark *down* più un'infinità di coppie quark-antiquark, si possono ottenere alcune relazioni che devono essere soddisfatte dalle distribuzioni partoniche,

come ad esempio la regola di somma che garantisce il corretto valore del momento totale

$$\int_0^1 x \sum_i f_i(x) dx = 1, \quad (1.15)$$

e quelle che riguardano la composizione del nucleone in termini di quarks di valenza

$$\int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x)) dx = 2, \quad \int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x)) dx = 1. \quad (1.16)$$

Queste relazioni hanno fornito la prima evidenza sperimentale per la correttezza del modello a partoni.

Ad oggi vi sono evidenze dell'esistenza di sei diversi sapori per i quarks: *up*, *charm* e *top* hanno una carica elettrica pari ai  $2/3$  di quella elementare mentre *down*, *strange* e *bottom* portano carica  $-1/3$  *e*. I quarks sono tutti fermioni ed i sapori che hanno carica uguale si distinguono gli uni dagli altri per la loro massa.

## 1.3 L'interazione forte

### 1.3.1 La carica di colore

La cromodinamica quantistica o QCD è la teoria quantistica di campo che descrive l'interazione forte, cioè quella forza fondamentale che tiene legati i quarks a formare gli adroni. La sorgente di questa interazione è costituita dalla carica di colore. Essa venne originariamente introdotta per ovviare ad un'evidente violazione del principio di esclusione di Pauli: il modello di Gell-Mann prevedeva infatti per la particella  $\Delta^{++}$  una composizione data da tre quarks *up* aventi la medesima funzione d'onda sia per quanto riguarda la parte spaziale sia per quel che concerne lo spin. Venne dunque ipotizzato che i quarks portassero un numero quantico addizionale a tre valori, il colore appunto, che consente la costruzione di uno stato totalmente antisimmetrico dei tre fermioni. All'invarianza sotto ridefinizione di colore corrisponde il gruppo di simmetria  $SU(3)_C$  che consente la costruzione della cromodinamica quantistica come teoria di gauge non abeliana.

### 1.3.2 Libertà asintotica e confinamento

Nelle teorie di campo quantistiche la carica di un oggetto puntiforme dipende dalla scala del fenomeno osservato. Ad esempio in elettrodinamica quantistica (QED) nel sondare la carica elettrica di una particella priva di dimensioni, quale può essere ad esempio un muone, bisogna tenere conto delle coppie elettrone-positrone che si generano dal vuoto attorno ad essa per poi annichilarsi in tempi brevi. Tali coppie formano dei dipoli che tendono ad orientarsi come accade in un mezzo materiale polare ed hanno quindi l'effetto complessivo di schermare la carica del muone considerato. L'importanza di questo effetto dipende dalla distanza che l'interazione

studiata riesce a risolvere in prossimità della carica elettrica: se la scala è grande un oggetto incidente osserverà molte coppie particella-antiparticella che schermano il muone e per quest'ultimo verrà misurata una carica piccola; al contrario se la distanza spaziale sondata è piccola la carica elettrica del muone sembrerà maggiore. Per questo motivo in teoria quantistica dei campi le costanti di accoppiamento dipendono dalla scala a cui avviene l'interazione, cioè dall'impulso trasferito durante di essa.

Nel caso dell'interazione elettromagnetica i bosoni che mediano la forza, cioè i fotoni, sono elettricamente neutri e non influenzano l'effetto complessivo schermante con l'aumentare delle distanze. Quando si considera invece l'interazione forte bisogna tenere presente che anche i gluoni trasportano una carica di colore; essi devono pertanto essere analizzati assieme alle coppie quark-antiquark al fine di ottenere il corretto andamento della costante di accoppiamento forte  $\alpha_s$ , che misura l'importanza delle interazioni di colore, in funzione di  $Q^2$ . Un calcolo dettagliato mostra che l'effetto dei gluoni è di segno opposto a quello dei quarks, cosicché  $\alpha_s$  cresce al diminuire dell'impulso trasferito.

Più precisamente, nel limite di distanze piccole, si ottiene che l'interazione forte diventa sempre meno importante fino ad annullarsi; questa proprietà, che è in accordo con l'ipotesi del modello a partoni riguardo la non-interazione fra i partoni stessi nel limite di grande  $Q^2$ , va sotto il nome di libertà asintotica. Tale caratteristica è fondamentale in cromodinamica quantistica perché permette lo sviluppo in teoria delle perturbazioni che a sua volta rende possibile l'applicazione pratica della QCD per energie sufficientemente alte.

Tramite calcoli al primo ordine (LO) in QCD perturbativa si ottiene:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}, \quad (1.17)$$

dove

$$\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}, \quad (1.18)$$

$n_f$  è il numero di sapori dei quark che prendono effettivamente parte nella produzione di coppie dal vuoto e dipende anch'esso dalla scala energetica, mentre  $\Lambda$  fissa il valore della costante per un dato impulso  $Q$  della particella mediatrice coinvolta nell'urto. La convenzione attualmente in uso per confrontare i risultati sulle stime di  $\alpha_s$ , che verrà utilizzata anche nel corso di questo lavoro, è quella di riportare la costante di accoppiamento forte al valore che essa assume alla scala energetica definita dalla massa della particella  $Z$ , cioè di porre  $Q^2 = m_Z^2$ .

Questo andamento o *running* di  $\alpha_s$  con  $Q^2$  è tuttavia valido solo in regimi di energia sufficientemente alta; ad oggi non si possiede alcuna tecnica di soluzione esatta che permetta di stabilire il comportamento dell'interazione forte per grandi distanze. Detto ciò, bisogna tenere presente che particelle libere con carica elettrica frazionaria non sono finora mai state osservate. Anzi fra i multipletti di sapore in

cui sono collocati gli adroni noti, solo a quelli che consentono la formazione di stati privi di colore corrispondono particelle realmente osservate. Ciò lascia supporre che la spesa energetica necessaria per la produzione di un quark libero sia alta al punto da preferire la formazione di nuovi adroni rispetto alla separazione spaziale delle cariche forti; questa proprietà, che caratterizza l'interazione forte per distanze grandi, è nota come confinamento.

### 1.3.3 Fattorizzazione e violazioni di scaling

Tra la cromodinamica quantistica ed il modello a partoni esiste una relazione stretta. Infatti in QCD le funzioni di struttura di un esperimento DIS soddisfano, a meno di correzioni di ordine  $\Lambda^2/Q^2$  o  $m^2/Q^2$  ( $m$  sono le masse delle particelle coinvolte nell'urto), il seguente teorema di fattorizzazione:

$$F_I(x, Q^2) = \sum_j C_{Ij}(x, \alpha_s(Q^2)) \otimes f_j(x, Q^2), \quad (1.19)$$

dove il simbolo  $\otimes$  denota l'operazione di convoluzione definita da

$$f(x) \otimes g(x) \equiv \int_x^1 f(y)g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}, \quad (1.20)$$

l'indice  $j$  scorre sulle distribuzioni partoniche e le *hard coefficient functions*  $C_{Ij}$  sono le funzioni di struttura calcolate per l'urto su singoli partoni. Lo sviluppo in QCD perturbativa al primo ordine delle  $C_{Ij}$  in queste relazioni conduce a riottenere il modello a partoni.

La cromodinamica quantistica non contempla inoltre che l'ipotesi di scaling di Bjorken possa essere verificata in modo esatto, ed infatti quello che si osserva andando ad analizzare con attenzione le funzioni di struttura misurate sperimentalmente è che vi è una dipendenza debole, ma non nulla, da  $Q^2$  oltre che da  $x$ , come mostrato in figura 1.2. Più precisamente quello che si ottiene è che per bassi valori di  $x$  la funzione  $F_2$  cresce con  $Q^2$  mentre per  $x$  alti presenta il comportamento opposto.

Questo fatto può essere interpretato se si ricorda che l'interazione fra i partoni, e quindi la frequenza con cui essi si scambiano gluoni, aumenta con il diminuire delle distanze risolte. Le distribuzioni partoniche che contribuiscono a  $F_2$  nello scattering elettrone-nucleone sono quelle dei quarks, che sono elettricamente carichi; poiché all'aumentare di  $Q^2$  la sonda riesce a vedere distanze e tempi più piccoli essa osserva i quarks scambiarsi sempre più gluoni. Il quadriimpulso portato dai quarks diminuisce di conseguenza e diventa più probabile che vi sia un'interazione corrispondente a valori di  $x$  inferiori. Può inoltre accadere che i gluoni a loro volta prendano parte in processi che coinvolgono la produzione di coppie quark-antiquark e che il fotone virtuale interagisca con partoni di questo tipo, o magari generati da eventi ancora più complessi. Senza entrare maggiormente nel dettaglio, qui è sufficiente dire che in QCD la dipendenza da  $Q^2$  delle distribuzioni partoniche è

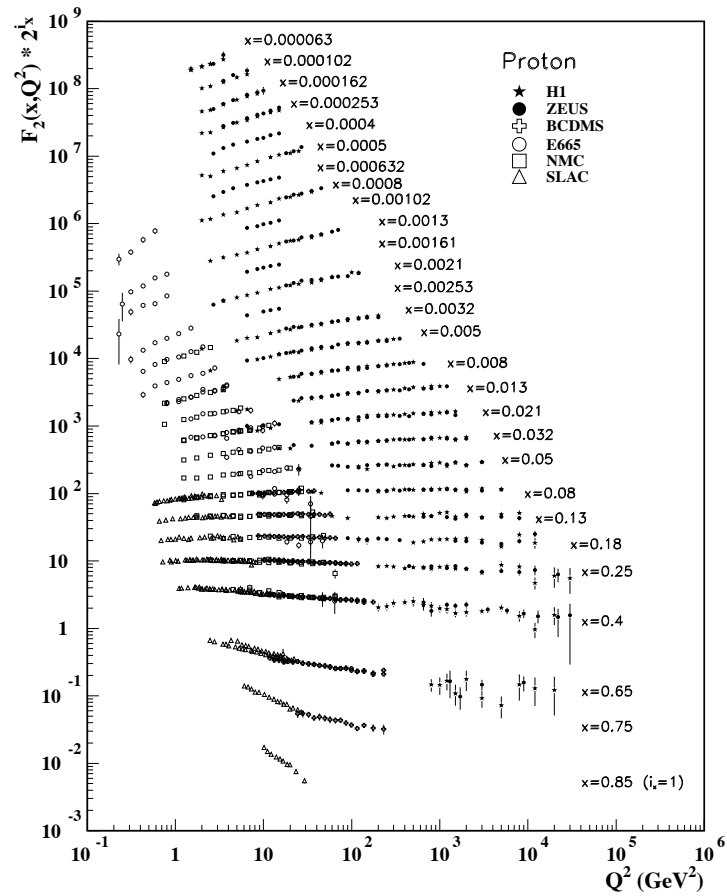


Figura 1.2: violazioni di scaling.

calcolabile perturbativamente. In particolare, note tutte le distribuzioni partoniche ad un certo  $Q_0^2$  per  $x > x_0$  è possibile determinare le PDF a qualsiasi altra scala risolvendo un sistema di equazioni integro-differenziali accoppiate, dette equazioni di Altarelli-Parisi o anche DGLAP, che comprende tante relazioni quante sono le distribuzioni partoniche in gioco.

# Capitolo 2

## NNPDF

### 2.1 A proposito di NNPDF

La procedura da noi utilizzata per effettuare i fit partonici è quella sviluppata dalla collaborazione NNPDF, che si basa su una rappresentazione di Monte Carlo della misura di probabilità nello spazio delle distribuzioni partoniche e sull'uso di reti neurali come funzioni interpolanti prive di bias.

#### 2.1.1 Il campionamento Monte Carlo

Come già accennato, la propagazione degli errori dai dati sperimentali al fit è gestita mediante il campionamento Monte Carlo della distribuzione di probabilità che costituisce l'informazione empirica. Il primo passo del metodo NNPDF consiste quindi nella generazione, per ogni punto sperimentale  $p$ , di  $N_{rep}$  repliche artificiali dei dati mediante la formula

$$F_{I,p}^{(art)(k)} = S_{N,p}^{(k)} F_{I,p}^{(exp)} \left( 1 + \sum_q r_{p,q}^{(k)} \sigma_{p,q} + r^{(k)} \sigma_{p,s} \right) \quad (2.1)$$

con

$$S_{N,p}^{(k)} = \prod_{n=1}^{N_a} (1 + r_{p,n}^{(k)} \sigma_{p,n}) \prod_{n=1}^{N_r} \sqrt{1 + r_{p,n}^{(k)} \sigma_{p,n}}, \quad (2.2)$$

dove

- $F_{I,p}^{(exp)}$  indica il valore medio sperimentale dell'osservabile  $F_I$  nel punto  $p$ ;
- $F_{I,p}^{(art)(k)}$  è il  $k$ -esimo elemento del campione artificiale che riproduce la distribuzione di probabilità empirica;
- $\sigma_{p,s}$  è l'incertezza sperimentale statistica sul valore di  $F_{I,p}^{(exp)}$ ;
- $\sigma_{p,q}$  è la covarianza relativa delle misure sperimentali  $p$  e  $q$ ;
- $\sigma_{p,n}$  sono le  $N_a$  ( $N_r$ ) incertezze assolute (relative) di normalizzazione;

- $r^{(k)}$ ,  $r_{p,n}^{(k)}$  ed  $r_{p,q}^{(k)}$  sono uscite pseudo-casuali estratte da una distribuzione gaussiana standard;
- $r_{p,q}^{(k)}$  è lo stesso quando si riferisce alla medesima coppia di punti.

In questo modo l'informazione statistica viene trasferita in un insieme di vettori di osservabili, che la riproducono con l'accuratezza desiderata pur di impiegare un numero sufficiente di copie. La precisione entro la quale le repliche riescono a ricalcare la distribuzione sperimentale è stata determinata quantitativamente mediante parametri opportuni; per ulteriori informazioni riguardo a questa verifica si rimanda ai lavori [2] e [4].

### 2.1.2 Parametrizzazione delle distribuzioni partoniche

Il motivo della scelta di utilizzare reti neurali con un numero ridondante di parametri per descrivere le distribuzioni partoniche è dettato dalla loro capacità di interpolare praticamente qualsiasi andamento senza prediligere nessuna specifica forma funzionale. Una rete neurale è costituita da un insieme di elaboratori elementari detti neuroni collegati fra loro. Ogni neurone con  $N_{\text{in}}$  links in entrata è sostanzialmente una funzione da  $\mathbb{R}^{N_{\text{in}}}$  in  $\mathbb{R}$  che a partire dal vettore  $(\xi_1, \dots, \xi_{N_{\text{in}}})$  di valori in ingresso produce un'uscita  $\xi$  data da

$$\xi = \sigma \left( \sum_{i=1}^{N_{\text{in}}} \omega_i \xi_i + \theta \right) \quad (2.3)$$

dove  $\sigma$  è una funzione non lineare che approssima una funzione a gradino. I parametri di ogni neurone sono dunque i pesi  $\omega_i$  assegnati ai links in entrata e la costante  $\theta$ , che prende il nome di soglia poiché individua il punto dove avviene il passaggio tra i due valori asintotici a sinistra e a destra del gradino. Per le reti neurali di NNPDF la funzione  $\sigma$  scelta è

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (2.4)$$

nota anche con il nome di sigmoide.

Al fine di riprodurre le PDFs vengono impiegate reti neurali dette perceptroni multistrato o anche reti feed-forward, nelle quali vi è una sequenza ordinata di insiemi di neuroni ciascuno dei quali prende come input i valori assunti dai neuroni dello strato precedente. L'architettura scelta è di tipo 2-5-3-1; vi sono cioè due entrate iniziali, due gruppi di neuroni che agiscono come sopra, ed infine vi è un neurone in cui  $\sigma$  è di tipo lineare. In questo modo ogni distribuzione partonica è determinata da 28 pesi (uno per ogni link) e 9 soglie (una per ogni neurone), per un totale di ben 37 parametri; il sovrannumero rispetto ai gradi di libertà necessari per riprodurre i dati sperimentali è la chiave per garantire l'indipendenza del risultato dalla forma funzionale assunta. Si noti che la struttura specifica appena descritta è stata selezionata perché particolarmente efficiente, tuttavia si vuole lavorare in condizioni tali che il risultato sia indipendente dall'architettura particolare scelta per

la rete neurale; per una verifica di questo fatto si rimanda nuovamente all'articolo [2].

Delle 13 distribuzioni partoniche che descrivono completamente il nucleone, una per ogni sapore di quark e antiquark più una per i gluoni, solo le 7 relative ai partoni più leggeri vengono determinate a partire dai dati sperimentali. Le altre vengono generate radiativamente: si suppone che siano nulle alla scala  $Q^2 = m_q^2$  dove  $m_q$  è la massa del quark pesante considerato, mentre al di sopra di questa soglia sono ottenute dalla soluzione delle equazioni di evoluzione della QCD. Il modo più semplice di ottenere questo risultato è usare il cosiddetto *zero mass variable flavour number scheme*, in cui le masse dei quarks pesanti vengono trascurate al di sopra della soglia. La scelta delle scale  $m_q$  a cui si annullano i contributi dei quarks pesanti alla struttura del nucleone costituisce una sorgente di incertezza teorica.

Le 7 PDF che vengono determinate durante il fit sono sviluppate sulla base che comprende:

- la distribuzione di singoletto  $\Sigma(x) = \sum_{i=1}^{n_f} (q_i(x) + \bar{q}_i(x))$ ;
- la valenza totale  $V(x) = \sum_{i=1}^{n_f} (q_i(x) - \bar{q}_i(x))$ ;
- il tripletto  $T_3(x) = (u(x) + \bar{u}(x)) - (d(x) + \bar{d}(x))$ ;
- la distribuzione di asimmetria del mare  $\Delta_S(x) = \bar{d}(x) - \bar{u}(x)$ ;
- le PDF strane pari e dispari sotto coniugazione di carica,  $s^+ = s(x) + \bar{s}(x)$  ed  $s^- = s(x) - \bar{s}(x)$ ;
- il gluone  $g(x)$ .

### 2.1.3 Addestramento delle reti neurali

L'elevata dimensionalità dello spazio dei parametri e la possibilità di avere numerosi minimi locali vengono affrontate utilizzando un algoritmo genetico per addestrare le reti neurali. L'applicazione che deve essere minimizzata è la funzione degli errori

$$E^{(k)}[\omega, \theta] = \sum_{p,q=1}^{N_{\text{dat}}} \left( F_{I,p}^{(art)(k)} - F_{I,p}^{(net)(k)} \right) (\overline{\text{cov}}^{-1})_{IJ} \left( F_{J,q}^{(art)(k)} - F_{J,q}^{(net)(k)} \right), \quad (2.5)$$

dove le  $F_I^{(net)}$  sono i valori previsti per le osservabili dati tutti i parametri  $[\omega, \theta]$  delle reti neurali.

L'algoritmo genetico si basa sulla proposta di un certo numero di cambiamenti per i valori dei parametri, scelti in modo pseudo-casuale, e sulla successiva scelta di quello fra di essi che produce un valore inferiore per  $E$ . Questo procedimento viene ripetuto fino a quando non è soddisfatta una condizione, discussa nel seguito, che determina l'arresto dell'evoluzione. L'importanza delle mutazioni fra una generazione di parametri e la successiva viene determinata dinamicamente durante il fit; è opportuno precisare che mentre nelle versioni 1.X di NNPDF i cambiamenti proposti sono sempre più piccoli man mano che il numero di iterazioni cresce, a partire da

NNPDF 2.0 viene sempre mantenuta una probabilità significativa che sia suggerita una mutazione grande.

Per ogni nuova proposta dei parametri durante questo algoritmo, al fine di valutare la funzione degli errori 2.5 devono essere ricalcolate le osservabili fisiche  $F_I^{(net)}$  tramite l'evoluzione delle distribuzioni partoniche alla scala opportuna e la loro successiva convoluzione con le osservabili relative ai singoli costituenti elementari. Il codice sviluppato dalla collaborazione NNPDF implementa questo procedimento interamente al secondo ordine (NLO) in QCD perturbativa, mantenendo tempi computazionali ragionevoli anche per quanto riguarda l'analisi degli esperimenti di Drell-Yan grazie ad un metodo appositamente sviluppato chiamato FastKernel. Una proprietà del fit partonico che viene richiesta esplicitamente in questa fase è la positività delle sezioni d'urto e delle funzioni di struttura anche in assenza di dati sperimentali.

### 2.1.4 Criterio di arresto

L'impiego di una parametrizzazione ridondante per le funzioni interpolanti comporta il rischio che esse assecondino anche le fluttuazioni dei dati dovute ad errori accidentali oltre all'andamento soggiacente dotato di reale significato fisico. In particolare le reti neurali utilizzate da NNPDF sono flessibili al punto da poter riprodurre il rumore statistico insieme al segnale cercato; quando una simile eventualità si verifica si dice che il fit è entrato in regime di *overtraining*. Si può evitare che questo problema comprometta il risultato dell'interpolazione arrestando l'addestramento delle distribuzioni partoniche non appena vi sono segnali di sovra-apprendimento.

La transizione verso questa seconda fase del fit può essere individuata in modo efficace grazie al metodo della *cross-validation*. Esso prevede la partizione dei dati iniziali in due sottoinsiemi, detti *training set* e *validation set*. La funzione di errore 2.5 viene calcolata per entrambi i sottoinsiemi di dati, ma solo quella relativa al training set viene minimizzata. In una prima fase dell'addestramento la funzione degli errori valutata considerando i soli elementi del training set diminuisce in seguito alla minimizzazione ed altrettanto avviene per la stessa cifra di merito riferita al validation set; questo fatto è un segnale che l'interpolazione sta riproducendo un andamento reale comune ai due sottoinsiemi e non le loro differenti fluttuazioni. Il fit viene fermato nel momento in cui la qualità con cui è riprodotto il validation set comincia a deteriorarsi, perché si suppone che tale effetto sia dovuto ad un fenomeno di overtraining che coinvolge solo il training set; un esempio del verificarsi di questa condizione tratto da NNPDF 1.0 è illustrato in figura 2.1.

Più precisamente l'arresto avviene quando si verifica la condizione:

$$r_{\text{tr}} > 1 - \delta_{\text{tr}}, \quad r_{\text{val}} < 1 + \delta_{\text{val}} \quad (2.6)$$

dove

$$r_{\text{tr, val}} \equiv \frac{\langle E_{\text{tr, val}}(i) \rangle}{\langle E_{\text{tr, val}}(i - \Delta_{\text{smear}}) \rangle}; \quad (2.7)$$

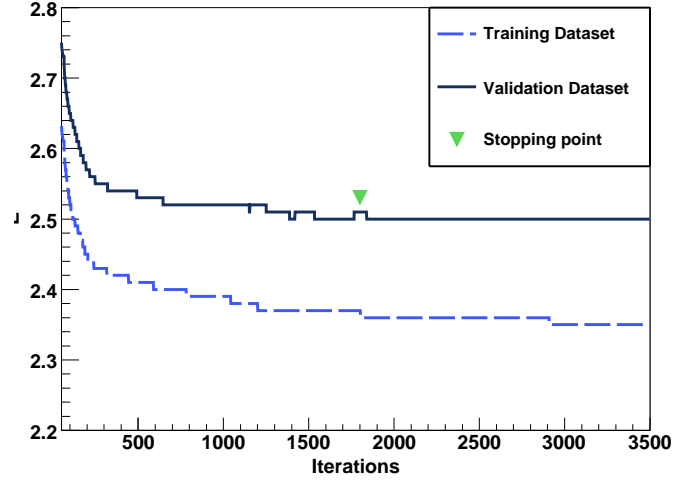


Figura 2.1: andamento della cifra di merito riferita al training set ed al validation set in funzione del numero di iterazioni dell’algoritmo genetico.

NNPDF	$N_{\text{smear}}$	$\Delta_{\text{smear}}$	$\delta_{\text{tr}}$	$\delta_{\text{val}}$	$N_{\text{gen}}^{\text{max}}$
1.X	45	13	$10^{-4}$	$10^{-4}$	5000
2.0	200	200	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	30000

Tabella 2.1: confronto fra i parametri di arresto per le diverse versioni di NNPDF

le funzioni degli errori regolarizzate grazie ad un’operazione di *moving average* sono definite da

$$\langle E_{\text{tr, val}}(i) \rangle \equiv \frac{1}{N_{\text{smear}}} \sum_{l=i-N_{\text{smear}}+1}^i E_{\text{tr, val}}(l), \quad (2.8)$$

dove  $E_{\text{tr, val}}(l)$  sono le funzioni degli errori 2.5 ristrette rispettivamente al training set ed al validation set, valutate per la generazione  $l$  dell’algoritmo genetico. Il criterio 2.6 è soddisfatto quando la figura di merito per il training set sta decrescendo poco (prima disequazione), mentre sta crescendo abbastanza per il validation set (seconda disequazione), coerentemente con quanto detto sopra. I valori dei parametri  $\delta_{\text{tr}}$ ,  $\delta_{\text{val}}$ ,  $N_{\text{smear}}$  e  $\Delta_{\text{smear}}$  sono scelti in modo da evitare effetti di overtraining senza tuttavia arrestare il fit prima del dovuto a causa di oscillazioni statistiche delle cifre di merito. Vi è inoltre un controllo che ferma l’algoritmo genetico se questo criterio non ha interrotto l’interpolazione entro un numero ragionevole di generazioni  $N_{\text{gen}}^{\text{max}}$  al fine di evitare tempi di calcolo eccessivamente lunghi.

I parametri sopra citati sono stati soggetti a rilevanti modifiche nel passaggio dalla versione 1.2 alla versione 2.0 di NNPDF, come si può notare osservando la tabella 2.1. Questo è dovuto da un lato al fatto che l’insieme dei dati usati per NNPDF 2.0 è considerevolmente più ampio, dall’altro a diverse modifiche introdotte nell’algoritmo genetico nel passaggio da 1.X a 2.0.

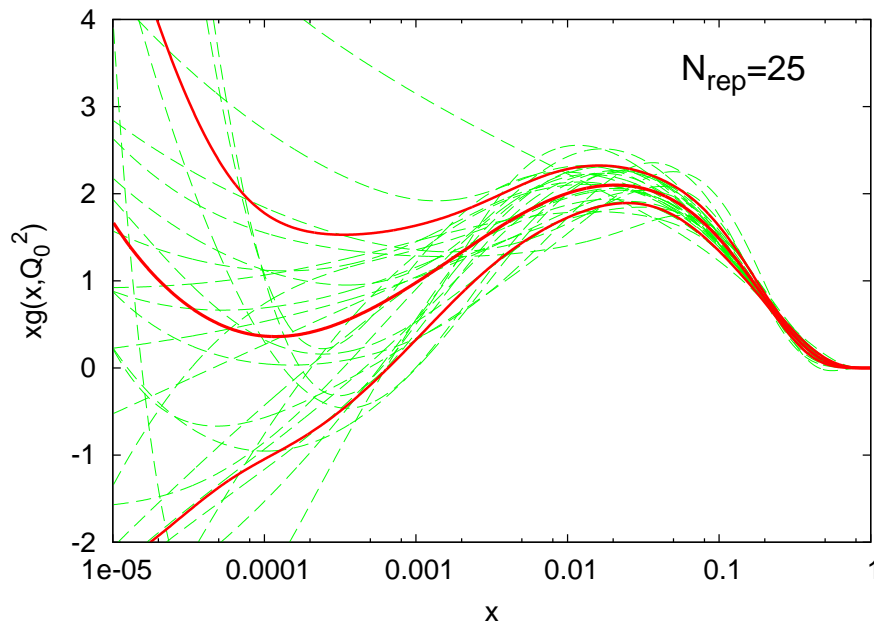


Figura 2.2: 25 repliche della distribuzione del gluone  $xg(x)$  ottenute mediante NNPDF 1.0 (in verde) e la loro media con il contorno  $1\sigma$  (in rosso).

### 2.1.5 La misura di probabilità nello spazio delle PDF

Portata a termine la procedura di fit separatamente per ogni replica, si perviene ad un insieme di distribuzioni partoniche che rappresenta un campionamento Monte Carlo della misura di probabilità nello spazio delle PDF; un esempio di una popolazione di questo tipo è rappresentato in figura 2.2. La migliore stima per le distribuzioni partoniche e la sua incertezza possono essere calcolate a partire dal campione tramite tecniche statistiche standard. Aumentando il numero di repliche impiegate è possibile migliorare la precisione con cui vengono individuati il valore medio della popolazione ed i contorni per un dato livello di confidenza; si noti che tuttavia l'incertezza sulle PDFs trovate è in ultima istanza una conseguenza degli errori sperimentali e non può essere ridotta a piacere. La qualità del fit viene valutata calcolando il  $\chi^2$  della miglior stima delle distribuzioni partoniche rispetto ai dati sperimentali.

## 2.2 Panoramica sui dati utilizzati

Nelle versioni 1.X di NNPDF, i dati impiegati provengono unicamente da esperimenti DIS. Più precisamente le informazioni utilizzate in queste versioni sono:

- le funzioni di struttura del protone e del deutrone raccolte dalle collaborazioni NMC e BCDMS, determinate mediante esperimenti di scattering a bersaglio

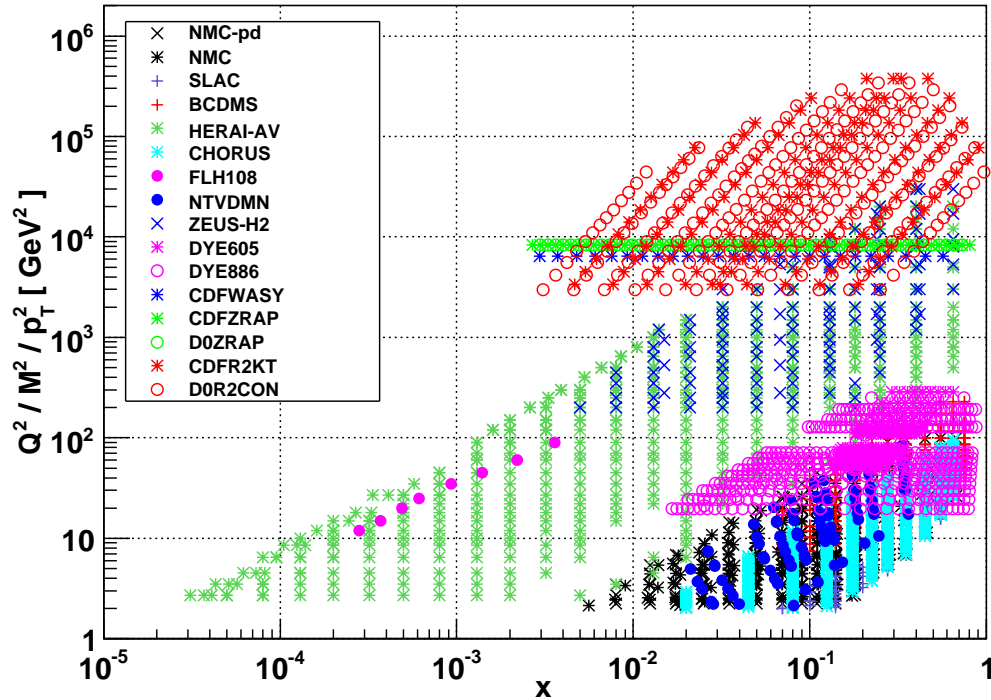


Figura 2.3: plot  $(x, Q^2)$  per i dati utilizzati da NNPDF 2.0.

fisso, insieme a dati dello stesso tipo raccolti a SLAC che, sebbene più vecchi e meno precisi, ampliano notevolmente la regione cinematica esplorata;

- i risultati degli esperimenti portati a termine dalle collaborazioni H1 e ZEUS presso il collider HERA, inclusa l'unica misura diretta finora disponibile di  $F_L$ ;
- i dati degli esperimenti di scattering di neutrini ed anti-neutrini raccolti dal gruppo CHORUS.

A partire dalla versione 2.0 di NNPDF, al posto dei dati di H1 e ZEUS analizzati separatamente è stato deciso di utilizzare il nuovo set combinato HERA-I; quest'ultimo infatti risulta più preciso poiché i due esperimenti traggono reciproco beneficio dalla loro calibrazione incrociata. L'implementazione nel passaggio alla nuova versione 2.0 del metodo FastKernel ha inoltre consentito di aggiungere ai dati già presenti:

- due serie di misure, indicate con le sigle DYE605 e DYE806, derivanti da esperimenti di Drell-Yan a bersaglio fisso;
- alcuni esperimenti effettuati presso il Fermilab che coinvolgono la produzione di bosoni vettori ed includono come osservabili sia le distribuzioni di rapidità del bosone  $Z$  raccolte ai rivelatori D0 e CDF, sia le distribuzioni di asimmetria del bosone  $W$  misurate sempre da CDF;

- informazioni relative ad eventi jet-inclusive raccolte durante il secondo run di Tevatron, sempre grazie a CDF e D0.

Le regioni cinematiche in cui si collocano questi dati sono rappresentate in figura 2.3.

# Capitolo 3

## Risultati

### 3.1 Il problema delle fluttuazioni statistiche

Definita la procedura che permette il fit partonico, il problema di trovare il valore di  $\alpha_s(m_Z^2)$  che meglio riproduce i dati sperimentali può dirsi ridotto a determinare, dato un insieme di coppie  $(\alpha_i, \chi_i^2)$ , l'ascissa relativa al minimo della funzione  $\chi^2(\alpha_s)$ . Se si assume che quest'ultima sia abbastanza liscia, nel punto estremante la sua derivata prima si annulla; ammesso che nel medesimo punto la derivata seconda sia diversa da zero, in un intorno del minimo il grafico è descritto approssimativamente da una forma funzionale parabolica. Si osservi che non è possibile stabilire a priori quale sia l'intervallo per cui questa approssimazione è valida entro una certa tolleranza, starà ai dati se accettare o rigettare una tale ipotesi.

Le grandezze significative di questa funzione che devono essere recuperate sono due. La prima è la posizione del minimo che, come già detto, rappresenta la migliore stima della costante di accoppiamento forte estraibile dai dati in accordo con quanto stabilito dal principio di massima verosimiglianza. La seconda è la semilarghezza della parabola ad un'altezza  $\Delta\chi^2 = 1$  sopra il minimo, che individua l'intervallo corrispondente al livello di confidenza del 68% per la stima del parametro sottostante, ovvero l'incertezza con cui i dati sperimentali considerati consentono la valutazione di  $\alpha_s(m_Z^2)$  [7].

Le sorgenti di errore sui punti in questione sono principalmente quattro:

- (1) l'eventuale non corretta valutazione delle incertezze, sistematiche ed accidentali, sui dati sperimentali impiegati per il fit partonico;
- (2) le assunzioni teoriche che stanno alla base della determinazione delle PDF, della loro evoluzione e della ricostruzione delle osservabili durante il fit;
- (3) la natura pseudo-casuale del procedimento di interpolazione che sfrutta l'algoritmo genetico: poiché l'arresto talvolta può avvenire prima che l'addestramento sia stato realmente completato o dopo l'entrata in regime di overtraining, la

qualità del fit, anche se i dati fossero sempre gli stessi, non sarebbe sempre uguale;

- (4) la determinazione del migliore set di distribuzioni partoniche a partire da un campione statistico generato con il metodo Monte Carlo: siccome le copie artificiali dei dati originari riproducono le oscillazioni delle misure sperimentali, il  $\chi^2$  è una random variabile distribuita secondo la sua caratteristica funzione di probabilità.

Mentre le prime due fonti di errore sono uguali per tutte le repliche e risultano in un cambiamento della funzione  $\chi^2(\alpha_s)$ , le seconde due sono accidentali e possono a priori essere completamente eliminate pur di disporre di un campione Monte Carlo abbastanza grande. Per bassi  $N_{rep}$  queste incertezze di natura statistica si manifestano sotto la forma di fluttuazioni anche molto rilevanti nel  $\chi^2$  ricavato per la migliore stima delle PDF.

Relativamente al contributo numero 4 all'incertezza totale è possibile anche valutare la deviazione standard di queste fluttuazioni. Infatti dalla formula che fornisce la distribuzione del valore medio del  $\chi^2$  determinato mediante  $N_{rep}$  repliche di un insieme di  $N_{dat}$  misure si ricava

$$\sigma_{\langle\chi^2\rangle} = \sqrt{\frac{2N_{dat}}{N_{rep}}}; \quad (3.1)$$

si osservi che siccome il numero di dati dei set utilizzati nel corso di questo lavoro è sempre di molto superiore al numero effettivo di parametri liberi, quest'ultimo viene trascurato nel calcolo dei gradi di libertà.

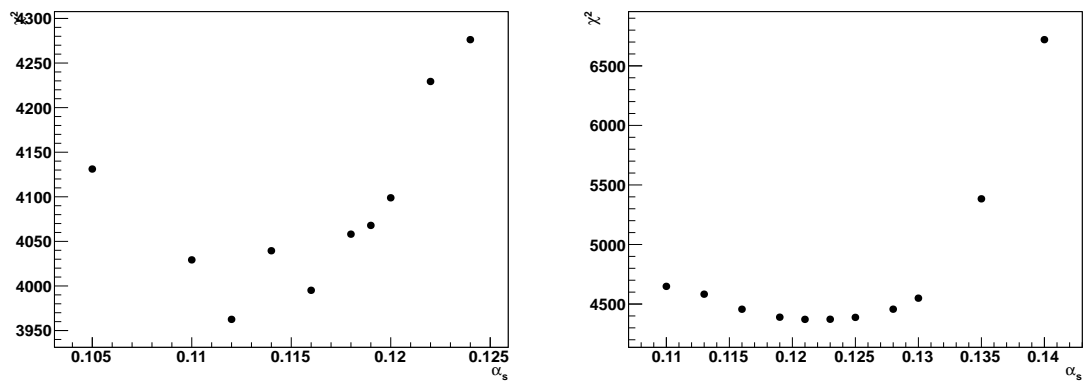


Figura 3.1: [a sinistra] set di punti ottenuto mediante NNPDF 2.0 a partire da un campione di 50 repliche; [a destra] i punti di NNPDF 1.2 con 500 repliche, interpolati con una parabola.

In figura 3.1 a sinistra sono rappresentati alcuni punti  $(\alpha_i, \chi_i^2)$  ottenuti con 50 repliche utilizzando NNPDF 2.0; in questo grafico è possibile osservare concretamente

le deviazioni dall'andamento parabolico dovute al rumore statistico. Nell'immagine immediatamente accanto invece sono illustrati i valori di  $\chi^2$  ricavati mediante NNPDF 1.2 usando 500 repliche, allo scopo di mostrare come anche con un campione numeroso possano insorgere incompatibilità con la forma funzionale prevista; in assenza di un metodo per valutare le incertezze diventa importante disporre di strumenti in grado di stabilire la qualità con cui sono riprodotti i dati.

## 3.2 Il metodo dei tre punti

### 3.2.1 Motivazione e descrizione

Per i motivi appena elencati nella determinazione del valore di  $\alpha_s(m_Z^2)$  ci si scontra con la necessità di dover gestire il fit di dati che sono, quando il numero di repliche non è sufficiente, fortemente oscillanti e perdipiù privi delle relative barre di errore. Al fine di ovviare all'instabilità mostrata dall'interpolazione mediante il metodo dei minimi quadrati in una simile situazione, è stata suggerita [9] una strategia alternativa riassunta nello schema seguente.

(i) Per ogni possibile terna di punti

$$(\alpha_j, \chi_j^2), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.2)$$

viene interpolata una parabola della forma  $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$  mediante la risoluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} \chi_1^2 = a_i \alpha_1^2 + b_i \alpha_1 + c_i \\ \chi_2^2 = a_i \alpha_2^2 + b_i \alpha_2 + c_i \\ \chi_3^2 = a_i \alpha_3^2 + b_i \alpha_3 + c_i \end{cases} \quad (3.3)$$

nelle incognite  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ , dove l'indice  $i$  scorre sulle

$$N_{min} = \binom{N_p}{3} \quad (3.4)$$

combinazioni di  $N_p$  punti presi a 3 a 3. Il minimo di questa funzione è quindi dato da

$$\bar{\alpha}_i = -\frac{b_i}{2a_i}. \quad (3.5)$$

(ii) L'intervallo che corrisponde all'incertezza sperimentale del minimo  $\bar{\alpha}_i$  si trova come la controimmagine dell'insieme  $[\bar{\chi}_i^2, \bar{\chi}_i^2 + \Delta\chi^2]$  sull'asse delle ordinate, dove  $\Delta\chi^2 = 1$  e

$$\bar{\chi}_i^2 = a_i \bar{\alpha}_i^2 + b_i \bar{\alpha}_i + c_i. \quad (3.6)$$

Le intersezioni della parabola con la retta orizzontale  $y = \bar{\chi}_i^2 + \Delta\chi^2$  si ottengono imponendo la condizione

$$a_i x^2 + b_i x + c_i = \bar{\chi}_i^2 + \Delta\chi^2; \quad (3.7)$$

pertanto risolvendo quest'ultima equazione, calcolando la differenza tra le soluzioni e dividendo per due si ricava la semiampiezza della parabola come

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{b_i^2 - 4a_i(c_i - \bar{\chi}_i^2 - \Delta\chi^2)}}{2a_i} = \frac{1}{\sqrt{a_i}}. \quad (3.8)$$

- (iii) Può accadere che, a causa di fluttuazioni particolarmente significative, alcune delle parabole individuate abbiano la concavità rivolta verso il basso. È stato deciso di ignorare totalmente i punti estremanti derivanti da curve di questo tipo, poiché la quantità da essi individuata chiaramente non ha a che fare con quella cercata. Naturalmente una simile scelta è giustificata solo se il numero di terne di punti così scartate è solo una piccola percentuale del totale, altrimenti la presenza di molti massimi suggerisce che le fluttuazioni statistiche sono larghe al punto da rendere questa procedura inaffidabile. Il valore atteso di  $\bar{\alpha}_s$  è quindi determinato come la media degli estremi  $\bar{\alpha}_i$  che appartengono a parabole con la concavità rivolta verso l'alto: detto  $M$  il sottoinsieme degli indici  $\{1, \dots, N_{min}\}$  che rappresentano effettivamente dei minimi e denotata con  $|M|$  la sua cardinalità, si ha

$$\bar{\alpha}_s = \frac{\sum_{i \in M} \bar{\alpha}_i}{|M|}. \quad (3.9)$$

La miglior stima per l'errore sperimentale, cioè la semilarghezza della parabola a  $\Delta\chi^2 = 1$ , viene determinata come la media delle semilarghezze di tutte le parabole convesse:

$$\bar{\sigma}_{exp} = \frac{\sum_{i \in M} \sigma_i}{|M|}. \quad (3.10)$$

Ci siamo proposti di verificare quale procedura fosse effettivamente la più efficace per determinare la posizione del minimo quando il set di punti è soggetto a fluttuazioni di diversa intensità.

Nel compiere questa operazione di controllo, poiché è stato osservato che la presenza di terne di punti allineati o quasi mette in crisi questo metodo, ne sono state progettate due varianti che consentono di ridurre l'impatto dei minimi molto lontani sulla media finale. Il primo consta nell'utilizzare la media pesata per ricavare  $\bar{\alpha}_s$  al posto della media aritmetica standard, considerando le semiampiezze delle parabole come incertezze sulle posizioni dei punti estremanti. Il secondo prevede l'eliminazione dei minimi che cadono all'esterno dell'intervallo in esame sull'asse delle ascisse; parleremo in questo caso di media con tagli.

Infine, allo scopo di verificare se effettivamente la scelta di suddividere l'insieme di coppie  $(\alpha_i, \chi_i^2)$  in sottoinsiemi di tre elementi sia la migliore possibile, è stato implementato il metodo esposto sopra considerando però, al posto delle terne, tutte le possibili combinazioni di quattro punti. Si osservi che in questo caso l'interpolazione di una parabola non è banalmente esatta e richiede un fit per ogni quadrupla.

### 3.2.2 Risultati delle simulazioni per i metodi

Al fine di studiare l'affidabilità di questi procedimenti è stato utilizzato un programma che simula la sovrapposizione di fluttuazioni accidentali ad un set di punti disposti esattamente secondo una parabola nota e ricava le stime di  $\alpha_s$  e  $\sigma_{exp}$  con tutti i metodi appena esposti. Ripetendo questi due passi un numero sufficientemente alto di volte, sono stati ricavati degli istogrammi che rappresentano le distribuzioni di probabilità di ottenere un certo risultato applicando uno specifico metodo, considerando noti i valori dell'asse delle ascisse per cui si hanno i punti, la vera parabola su cui questi si collocano e l'ampiezza delle fluttuazioni. I parametri appena citati sono stati impostati in modo da riprodurre, almeno a grandi linee, le caratteristiche del problema reale.

Le grandezze considerate in questo lavoro al fine di valutare quantitativamente in che misura gli stimatori proposti siano desiderabili sono tre. La varianza  $\sigma^2$  ed il bias  $b$  sono definiti dalle relazioni

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad b = \langle x - x^{(true)} \rangle \quad (3.11)$$

dove le parentesi  $\langle \cdot \rangle$  indicano il valor medio. L'errore quadratico medio, spesso indicato con l'acronimo MSE che sta per *mean squared error*, si definisce invece ponendo

$$\text{MSE} = \langle (x - x^{(true)})^2 \rangle; \quad (3.12)$$

si può facilmente dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\text{MSE} = \sigma^2 + b^2. \quad (3.13)$$

Dall'analisi delle proprietà degli stimatori per il minimo riportata nell'appendice A, si evince che l'unica procedura fra quelle considerate il cui bias è sempre nullo è il metodo dei minimi quadrati; tuttavia può essere vantaggioso decidere di impiegare, secondo un criterio comunemente adottato, il metodo contraddistinto dal minimo MSE. In questo caso la scelta migliore, qualora le fluttuazioni siano grandi, sembra essere usare la variante del metodo dei tre punti che prevede di tagliare i minimi al di fuori dell'intervallo considerato; nell'impiego di questo stimatore è necessario prestare comunque attenzione a tenere il bias sotto controllo.

Per quanto riguarda le procedure per determinare la semiampiezza la discussione non è altrettanto rilevante; l'unica constatazione che vale la pena riportare è che applicare i tagli di cui sopra ai metodi dei tre e dei quattro punti conduce ad una sottostima sistematica significativa di questa grandezza. Pertanto quando nel seguito verranno riportati i risultati della procedura dei tre punti il valore di  $\alpha_s$  è da intendersi ricavato scartando i minimi lontani mentre per il calcolo dell'errore statistico sperimentale non viene eliminata nessuna parabola.

Concludiamo questa breve discussione osservando che il parametro di confronto per stabilire se le fluttuazioni sono piccole o grandi (e quindi decidere quale sia il metodo più conveniente) è collegato agli scarti fra i diversi  $\chi_i^2$ , ovvero alle differenze fra i valori che la funzione soggiacente assume in corrispondenza dei punti scelti sull'asse orizzontale.

### 3.3 NNPDF 1.2 e 2.0 a confronto

#### 3.3.1 I risultati di NNPDF 1.2

Il primo insieme di dati che ci siamo proposti di analizzare è costituito dai risultati di un lavoro precedente [9], che sono stati ricavati con NNPDF 1.2 e sono riportati per comodità in tabella 3.1 alla fine di questa sezione. I valori del  $\chi^2$  totale per il fit partonico al variare della costante di accoppiamento forte, ciascuno dei quali è stato ricavato da un campione di 500 repliche, sono rappresentati graficamente in figura 3.2 assieme alle parabole che si ottengono mediante l'applicazione delle procedure analizzate nella sezione precedente. I risultati numerici sono

$$\begin{aligned} \text{Minimi quadrati: } & \alpha_s(m_Z^2) = 0.1202 \pm 0.0004^{(exp)}; \\ \text{Tre punti: } & \alpha_s(m_Z^2) = 0.1219 \pm 0.0005^{(exp)}. \end{aligned}$$

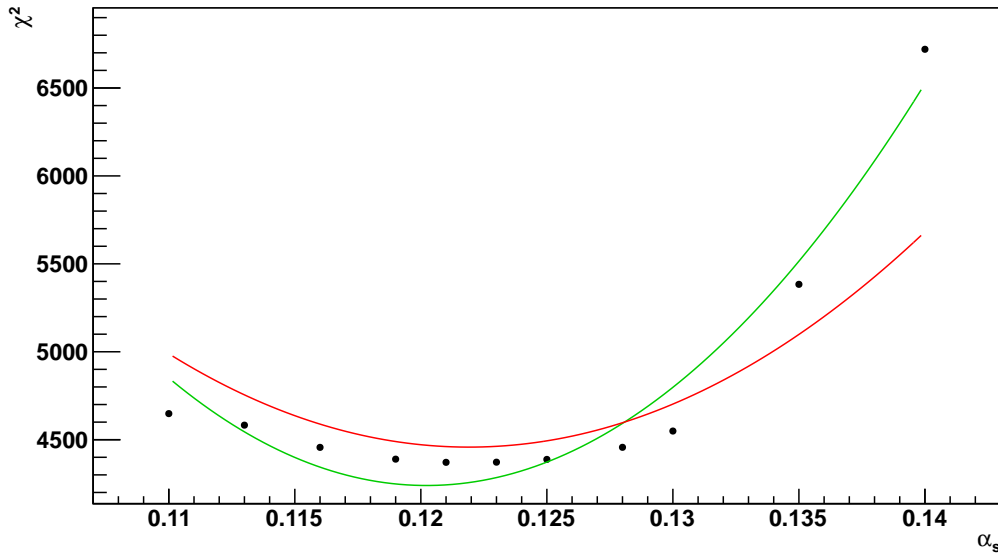


Figura 3.2: Rappresentazione grafica dei risultati per il set di dati ottenuto con NNPDF 1.2; [in verde] parabola ottenuta con il metodo dei minimi quadrati, [in rosso] parabola ottenuta con il metodo dei tre punti.

L'accordo fra i due valori ottenuti per  $\alpha_s$  non è buono, e la ragione di questo fatto è suggerita dal grafico: infatti la parabola interpolata seguendo il principio dei minimi quadrati mal riproduce l'andamento dei punti perché troppo stretta, mentre quella ricavata con il metodo dei tre punti si adatta bene ai dati solo nella zona centrale, ignorando sostanzialmente quelli più esterni. Si osservi inoltre che la disposizione dei punti è fortemente asimmetrica rispetto all'asse verticale passante per il minimo. Tutto questo induce a pensare che nella regione più esterna sia presente un contributo non-quadratico significativo che causa il deteriorarsi della qualità del fit.

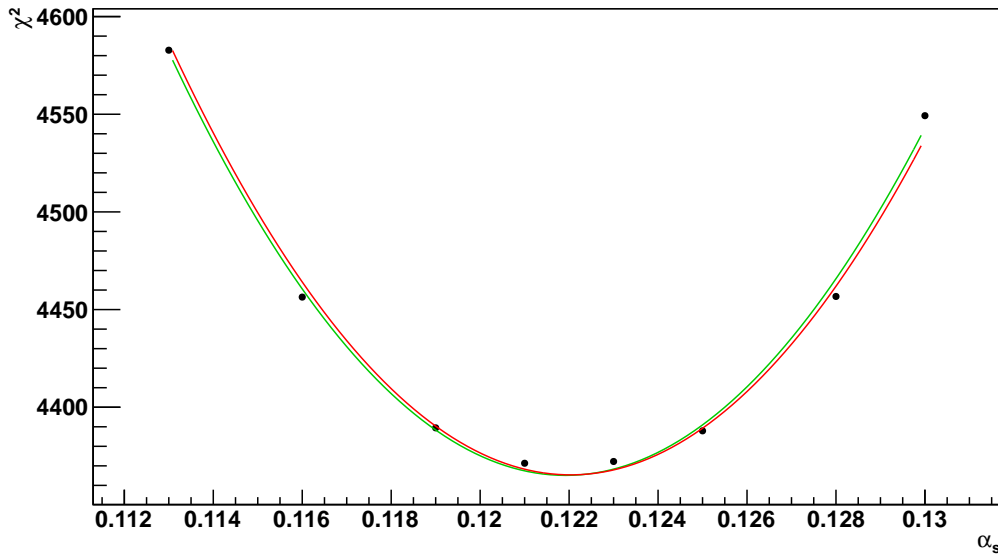


Figura 3.3: Rappresentazione grafica dei risultati per il set di dati di NNPDF 1.2 tagliato; [in verde] parabola ottenuta con il metodo dei minimi quadrati, [in rosso] parabola ottenuta con il metodo dei tre punti.

Ripetendo la procedura scartando i tre punti più lontani dal minimo, due sulla destra ed uno sulla sinistra, si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Minimi quadrati:} \quad & \alpha_s(m_Z^2) = 0.1219 \pm 0.0006^{(exp)}; \\ \text{Metodo dei tre punti:} \quad & \alpha_s(m_Z^2) = 0.1220 \pm 0.0006^{(exp)}. \end{aligned}$$

Le due stime di  $\alpha_s$  si trovano ora sostanzialmente a coincidere come si può notare, oltre che dai risultati numerici, dal grafico riportato in figura 3.3; questa situazione può essere interpretata come un indice della stabilità dei valori trovati. Mentre il risultato della procedura ricavata dal principio dei minimi quadrati ha subito una notevole variazione in seguito all'eliminazione dei tre punti di cui sopra, la stima fornita dal metodo dei tre punti è cambiata relativamente poco: esso si è rivelato essere abbastanza robusto rispetto a una deviazione dell'andamento sperimentale dal comportamento quadratico atteso.

Per concludere vale la pena soffermarsi brevemente ad osservare la figura 3.4, dove è illustrato come cambia al variare di  $\alpha_s$  la qualità con cui sono riprodotti i dati sperimentali relativamente a ogni singolo esperimento. Si osservi che questi grafici devono essere interpretati ricordando che essi sono stati ricavati mediante un fit globale: un  $\chi^2$  che segnala la scarsa compatibilità del fit partonico con un esperimento per un certo valore di  $\alpha_s$  indica solamente che le PDF che minimizzano la cifra di merito globale in quelle condizioni non ne riproducono bene le misure, non è detto invece che quell'esperimento sia di per sé in disaccordo con il valore della costante considerato.

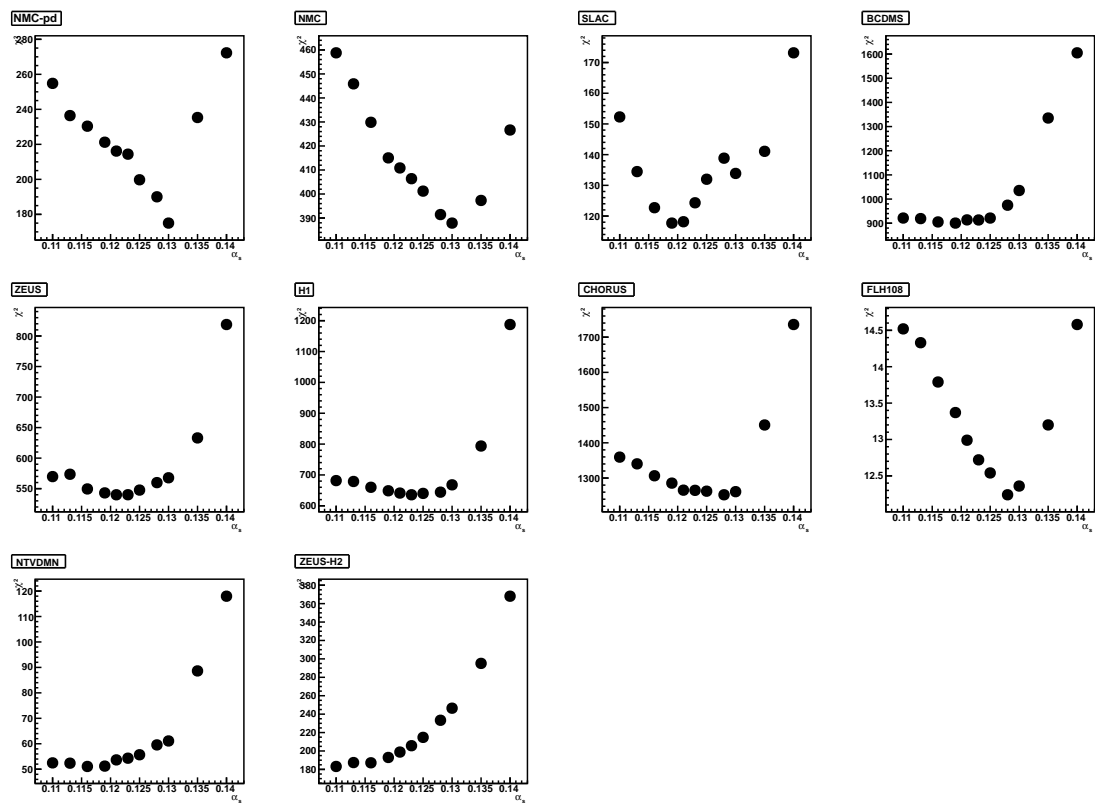


Figura 3.4:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento in un fit di soli esperimenti DIS effettuato con NNPDF 1.2.

### 3.3.2 Fit con NNPDF 2.0 DIS-only

Al fine di valutare l'impatto delle modifiche apportate nel passaggio dalla versione 1.2 di NNPDF alla 2.0, il medesimo studio è stato ripetuto con la nuova procedura per il fit partonico globale considerando solo esperimenti di scattering profondamente anelastico. Anche in questo caso sono stati considerati 11 diversi valori di  $\alpha_s$  e ciascun punto è stato determinato a partire da un campione di 500 repliche; i risultati sono riassunti nella tabella 3.2. I valori numerici che assumono gli stimatori per il minimo e per la semiampiezza in corrispondenza di questo set di dati sono

$$\begin{aligned} \text{Minimi quadrati: } & \alpha_s(m_Z^2) = 0.1127 \pm 0.0009^{(exp)}; \\ \text{Tre punti: } & \alpha_s(m_Z^2) = 0.1135 \pm 0.0010^{(exp)}. \end{aligned}$$

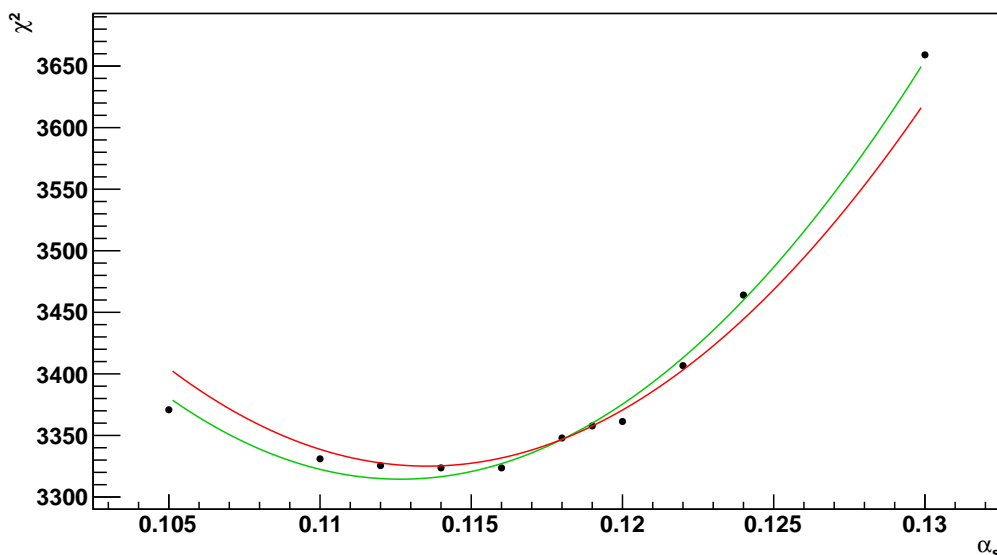


Figura 3.5:  $\chi^2$  totale per gli esperimenti DIS fittati con NNPDF 2.0; [in verde] parabola ottenuta con il metodo dei minimi quadrati, [in rosso] parabola ottenuta con il metodo dei tre punti.

I due valori ottenuti mediante il metodo dei minimi quadrati ed il metodo dei tre punti sono, sebbene non esattamente coincidenti, compatibili entro  $1\sigma$ : per questo motivo non vi è ragione di ritenere che le deviazioni dal comportamento quadratico comportino la necessità di eliminare dei punti. La qualità dell'interpolazione non è immediatamente quantificabile poiché in questo caso non sono state valutate le barre di errore, tuttavia il grafico suggerisce la presenza di fluttuazioni abbastanza rilevanti, nonostante il campione Monte Carlo da cui questo fit è estratto sia consistente.

Osservando la rappresentazione grafica in figura 3.5 ed i valori in tabella, è possibile osservare che il  $\chi^2$  totale del fit si è ridotto drasticamente rispetto al caso precedente. Si ricordi che nella transizione da NNPDF 1.2 a NNPDF 2.0 i dati di

H1 e ZEUS, già abbastanza precisi, sono stati sostituiti dal set combinato HERAI-AV le cui incertezze sono ancora inferiori. Ciò ha comportato tra le altre cose una diminuzione del numero di punti da 3380 a 2841 ed il conseguente calo del  $\chi^2$  totale; tuttavia anche il  $\chi^2$  normalizzato è sceso da circa 1.30 a circa 1.17 implementando le modifiche di NNPDF 2.0. Che il passaggio alla più recente versione di NNPDF migliorasse di molto la qualità del fit era in realtà già noto da studi precedenti [4] ed è sostanzialmente dovuto all'introduzione del *targeted weighted training* ed perfezionamento dei dati di HERA; in questa sede l'aspetto interessante è vedere quanto tale cambiamento incida sulla migliore stima della costante di accoppiamento forte.

Dai valori numerici appare evidente che l'impatto delle modifiche apportate sulla determinazione di  $\alpha_s$  è notevole, infatti rispetto alla situazione del paragrafo 3.3.1 esso subisce una variazione molto più grande della sua incertezza tipica. Un ulteriore effetto che si può notare è l'aumento della larghezza della parabola: i vincoli imposti ad  $\alpha_s$  nel caso di NNPDF 1.2 per via dell'algoritmo di interpolazione, che sono in ultima analisi dovuti alla procedura e pertanto non fisici, sono più restrittivi di quelli effettivamente dettati dai dati sperimentali.

Anche in questo caso riportiamo in figura 3.6 i grafici che mostrano l'andamento della qualità del fit per ogni singolo esperimento.

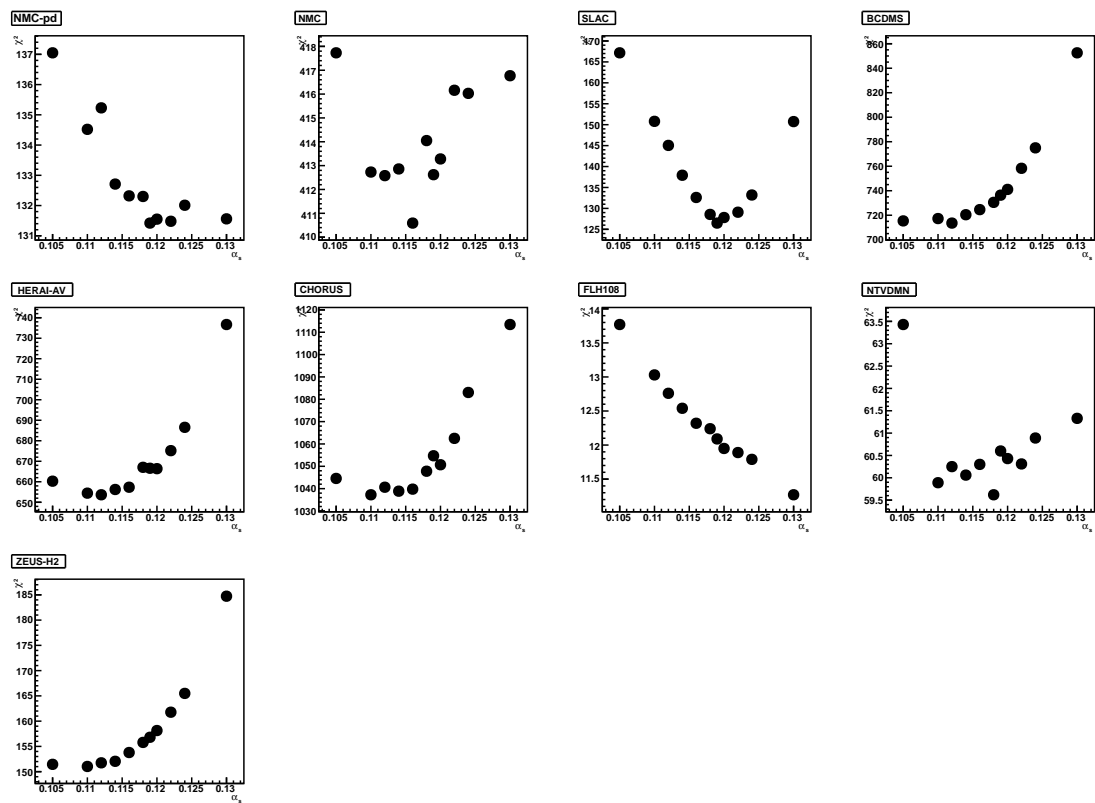


Figura 3.6:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento in un fit di soli esperimenti DIS effettuato con NNPDF 2.0.

### 3.4 Determinazione di $\alpha_s(m_Z^2)$

La stima più attendibile della costante di accoppiamento forte che ad oggi è possibile produrre utilizzando la metodologia tracciata nel corso di questo lavoro è quella che si ottiene considerando tutti gli esperimenti elencati nella sezione 2.2 ed analizzandoli con la versione più aggiornata disponibile di NNPDF, ovvero la 2.0.

#### 3.4.1 Variazione dei punti con $N_{rep}$

Al fine di comprendere quanto il valore estratto sia effettivamente affidabile, è importante poter stimare, assieme alle incertezze sperimentali e teoriche, anche l'errore procedurale. In questo contesto è molto utile disporre di una strategia per valutare, almeno in modo approssimato, le barre di errore sui punti ( $\alpha_i, \chi_i^2$ ) ovvero l'ampiezza delle fluttuazioni statistiche.

Una volta terminata l'elaborazione per un certo numero di repliche  $N_{rep}^{max}$  è possibile tracciare un grafico che mostra l'andamento, per  $\alpha_s$  fissato, del  $\chi^2$  per il set di distribuzioni partoniche ottenuto a partire dalle prime  $N_{rep}$  repliche. Nel nostro caso la media sui set di PDF di singola replica ed il corrispondente calcolo del  $\chi^2$  sono stati effettuati per  $N_{rep}$  che va da 10 a 500 a passi di 5 e per tutti i valori di  $\alpha_s$  disponibili; in figura 3.7 è riportato uno dei plot che sono stati ricavati in questo modo. Come si può notare, dopo una fase iniziale durante la quale vi è una forte oscillazione del valore di  $\chi^2$ , il risultato tende a stabilizzarsi. Questo grafico suggerisce che in qualche modo sia possibile determinare un involucro che rappresenta il contorno  $1\sigma$  delle fluttuazioni al variare di  $N_{rep}$ ; un andamento come quello raffigurato è tuttavia troppo instabile per consentire una simile operazione basandosi unicamente su di esso. Se si vuole trovare una legge che stimi le fluttuazioni in modo realistico, è necessario regolarizzare in qualche modo il risultato fin qui ottenuto.

Supponendo che tutti i plot di questo tipo siano il risultato della sovrapposizione di un segnale costante e di fluttuazioni sostanzialmente indipendenti da esso, sottraendo la migliore stima disponibile per il segnale, ovvero il  $\chi^2$  calcolato per

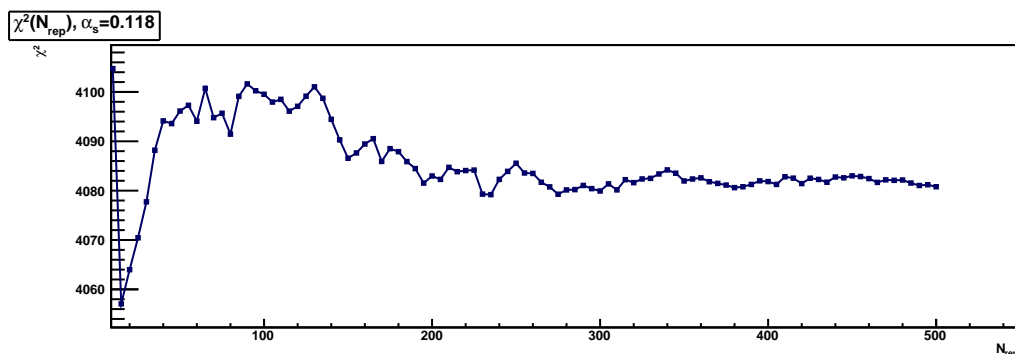


Figura 3.7: esempio di andamento delle fluttuazioni con il variare del numero di repliche.

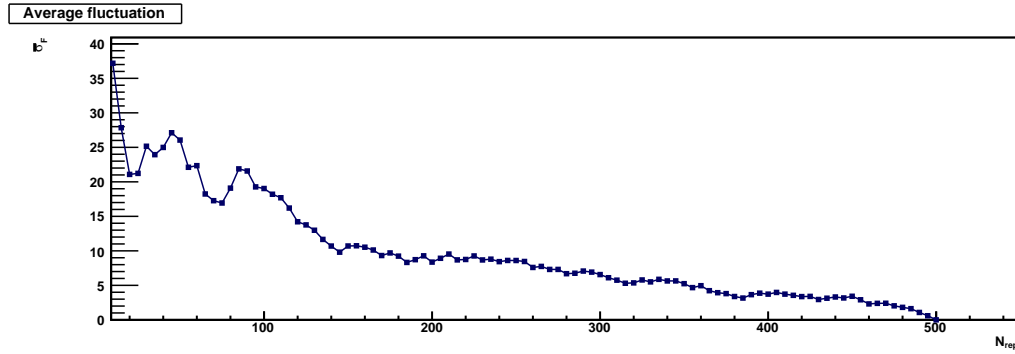


Figura 3.8: andamento della media in quadratura delle fluttuazioni con il variare del numero di repliche.

$N_{rep}^{max} = 500$ , è possibile ricavare diversi grafici (uno per ogni diverso  $\alpha_s$ ) che per un numero fissato di repliche rappresentano ciascuno un'estrazione della medesima random variabile. La media in quadratura di queste uscite, che si calcola mediante la formula

$$\bar{\sigma}_F(N_{rep}) = \sqrt{\frac{\sum_i (\chi_i^2(N_{rep}) - \chi_i^2(N_{rep}^{max}))^2}{n_\alpha}} \quad (3.14)$$

dove  $n_\alpha$  è il numero di valori di  $\alpha_s$  considerati, è una funzione di  $N_{rep}$  che rappresenta il contorno  $1\sigma$  di cui sopra e che, malgrado mantenga un certo rumore residuo, è piuttosto regolare, come si può osservare in figura 3.8.

Chiaramente per costruzione i dati ottenuti tendono a sottostimare l'ampiezza delle fluttuazioni quando  $N_{rep}$  diventa grande e si avvicina ad  $N_{rep}^{max}$ ; tuttavia almeno nella prima metà dovrebbero riprodurre ragionevolmente la situazione reale. Assumendo che anche il contributo alle fluttuazioni dovuto all'arresto non perfetto dell'algoritmo genetico abbia un andamento del tipo  $1/\sqrt{N_{rep}}$ , è possibile trovare una funzione che interpola il grafico determinando un solo parametro libero. In analogia con la formula 3.1 è stato scelto di utilizzare la parametrizzazione

$$\sigma_F(N_{rep}) = \sqrt{\frac{2N_{dat}^{eff}}{N_{rep}}}, \quad (3.15)$$

dove  $N_{dat}^{eff}$  è la variabile libera che deve essere trovata.

Effettuando il procedimento di interpolazione su un intervallo mobile della forma  $[N_{rep}^{mov} - \Delta_{rep}, N_{rep}^{mov}]$  per  $N_{rep}$ , si ottiene un grafico come quello in figura 3.9. Da questa illustrazione si può vedere come per piccoli valori di  $N_{rep}$  sia presente un contributo che non ha la forma funzionale della radice inversa, o comunque l'andamento delle fluttuazioni sia instabile al punto da compromettere un fit del tipo considerato. D'altra parte dopo una iniziale regione di instabilità vi è una zona di ampiezza pari a circa 200 repliche in cui il fit produce sempre lo stesso risultato; questo consente di stimare approssimativamente

$$N_{dat}^{eff} \approx 8100.$$

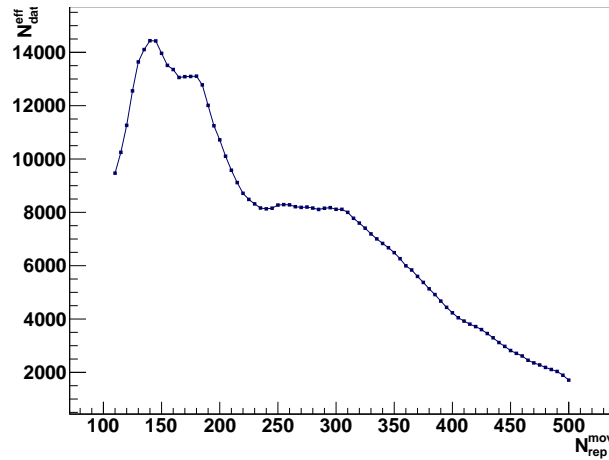


Figura 3.9: stime del parametro  $N_{dat}^{\text{eff}}$  al variare dell'intervallo mobile, con  $\Delta_{rep} = 100$  ed  $N_{rep}^{\text{mov}}$  che va da 110 a 500 a passi di 5.

Dalla metà del grafico in avanti invece si entra nella regione in cui le fluttuazioni sono sistematicamente sottovalutate per costruzione.

Nell'immagine 3.10 sono illustrati gli andamenti, traslati sullo zero, di tutti i singoli  $\chi_i^2$  in funzione di  $N_{rep}$ , insieme al contorno  $1\sigma$  individuato dalla funzione 3.15. In conclusione una stima per le barre di errore è data proprio da questa funzione valutata per il numero di repliche opportuno.

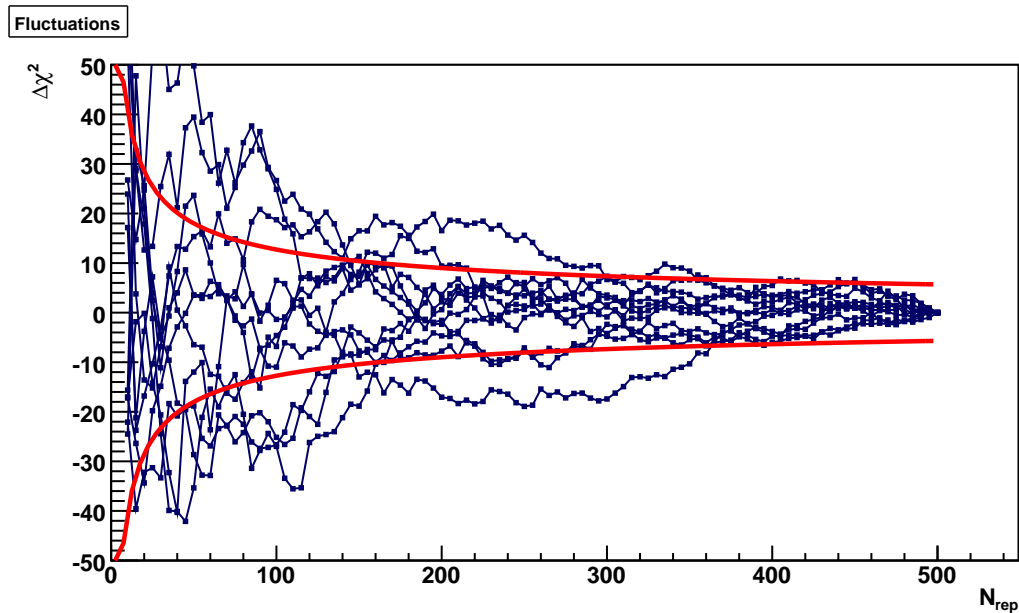


Figura 3.10: le fluttuazioni del  $\chi^2$  con il loro involuppo che ne stima l'ampiezza.

### 3.4.2 Stima di $\alpha_s$ con NNPDF 2.0, tutti gli esperimenti

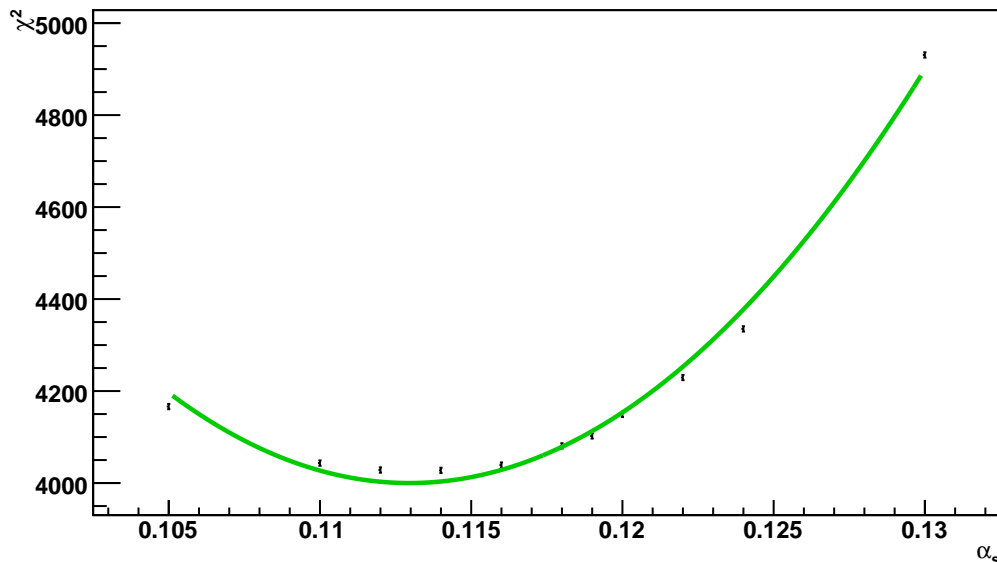


Figura 3.11:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento in un fit effettuato con NNPDF 2.0 considerando tutti gli esperimenti.

I dati relativi al fit partonico effettuato con NNPDF 2.0 considerando anche gli esperimenti di Drell-Yan, produzione di bosone vettore e jet adronici sono riportati in tabella 3.3 ed illustrati in figura 3.11. In questo caso le barre di errore, ricavate come discusso in precedenza, rendono sostanzialmente superfluo utilizzare il metodo dei tre punti; infatti le fluttuazioni sono piccole e l'incertezza sul risultato può essere ricavata mediante le prescrizioni standard del metodo dei minimi quadrati. L'ipotesi di un andamento parabolico per tutti i punti, come testimoniato dal valore del  $\chi^2$  del fit normalizzato ai gradi di libertà che è pari a circa 22 e come del resto si può vedere dal grafico, deve essere scartata: le barre di errore sono troppo piccole per accettare questa approssimazione.

Tuttavia si può pensare che questo disaccordo sia dovuto alla presenza di termini non quadratici nelle zone più lontane dal minimo, come del resto è già stato visto nella sezione 3.3.1. Scartando il punto più distante, cioè quello relativo ad  $\alpha_s = 0.130$ , si ottiene il grafico di figura 3.12 ed un  $\chi^2$  normalizzato per il fit parabolico di 1.7. L'ipotesi di andamento parabolico è pertanto compatibile con i dati sperimentali. Applicando le regole esatte dettate dal principio dei minimi quadrati e ponendo attenzione ad includere gli effetti dovuti alla covarianza nella valutazione delle incertezze sui parametri si ricava:

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1128 \pm 0.0001^{(proc)}; \quad \sigma^{(exp)} = 0.00063 \pm 0.00001^{(proc)}.$$

Rispetto alla stima relativa ai soli esperimenti DIS effettuata con la stessa versione di NNPDF si può osservare che il minimo rimane sostanzialmente invariato

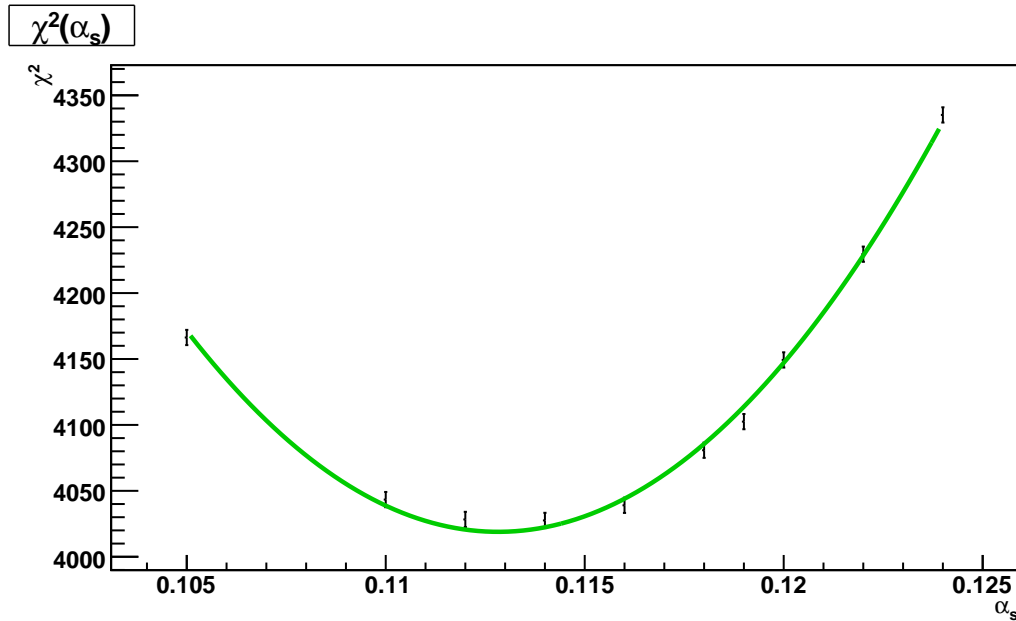


Figura 3.12:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento in un fit effettuato con NNPDF 2.0 considerando tutti gli esperimenti, situazione dopo aver scartato il punto più distante dal minimo.

mentre l'errore sperimentale risulta ridotto, così come ci si aspetta che accada aggiungendo punti sperimentali compatibili con quelli già considerati. La qualità del fit partonico è misurata da un  $\chi^2$  per grado di libertà di circa 1.8, ed è pertanto molto simile allo stesso dato ottenuto unicamente a partire dagli esperimenti di urto profondamente anelastico.

I dati del fit parabolico invece indicano chiaramente che l'errore procedurale sulla stima di  $\alpha_s$  è piccolo in confronto all'incertezza statistica sperimentale. Purtroppo per quanto riguarda NNPDF non è disponibile una valutazione dettagliata dell'impatto delle assunzioni teoriche sul fit partonico globale; tuttavia lavori simili riportano incertezze di questo tipo che si attestano di solito sul 2 – 3%: vi è dunque ragione per credere che nel nostro caso sia proprio questo il contributo dominante all'errore sulla costante di accoppiamento forte. Rispetto all'odierno panorama globale il risultato da noi trovato si colloca al limite inferiore delle stime correntemente accettate. Non bisogna trascurare però che alcuni recenti studi particolarmente accurati hanno prodotto valori simili al nostro (si veda ad esempio [1]).

Per concludere l'analisi, in figura 3.13 è riportato l'andamento della qualità del fit per ogni singolo esperimento. In aggiunta a questo plot ne viene riportato un altro in figura 3.14 in cui i valori del  $\chi^2$  per esperimento sono traslati verticalmente in modo che il minimo di ciascuno coincida con zero, e inoltre i grafici sono raggruppati per tipologia di esperimento.

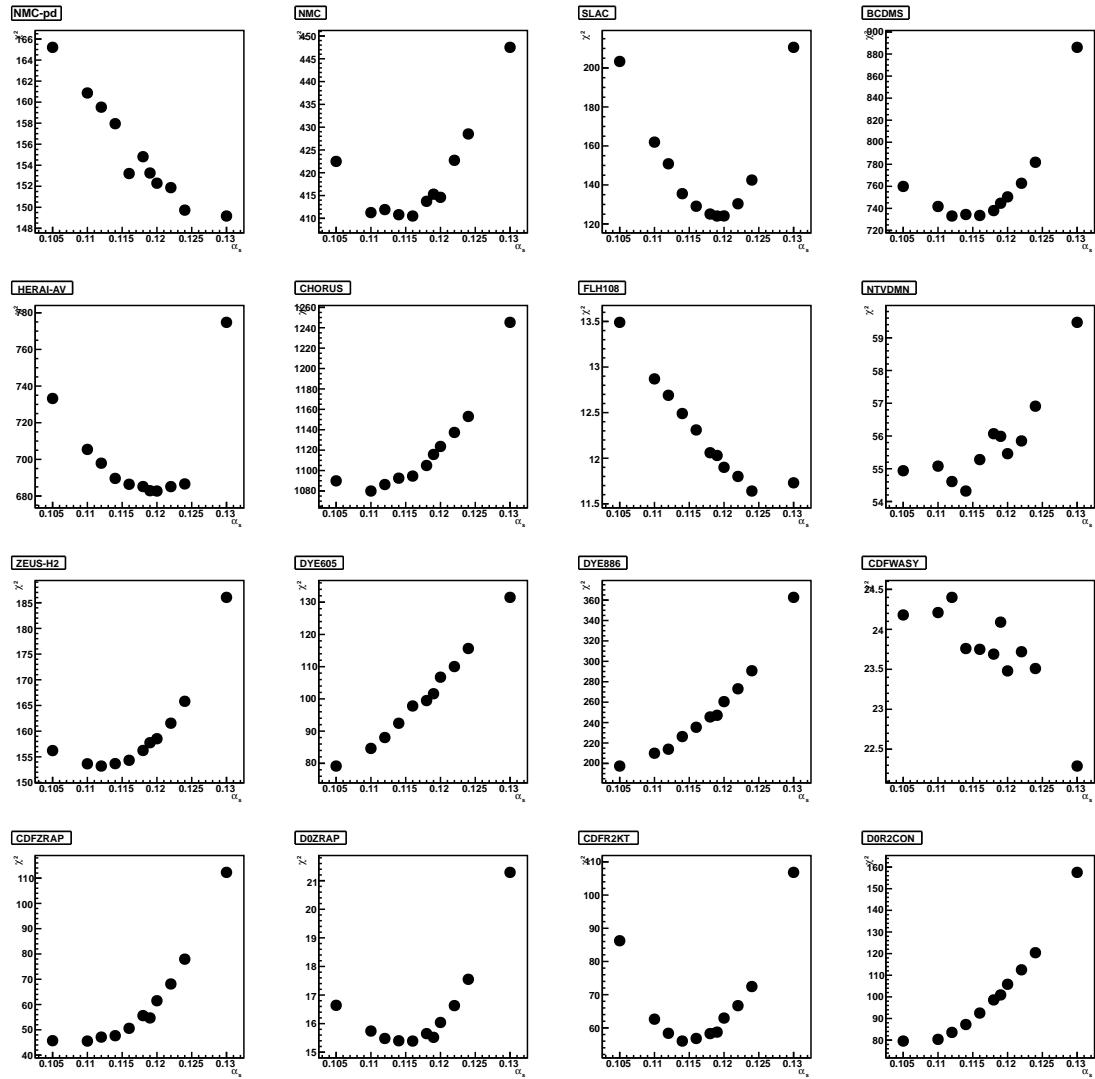


Figura 3.13:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento relativo al fit globale effettuato con NNPDF 2.0.

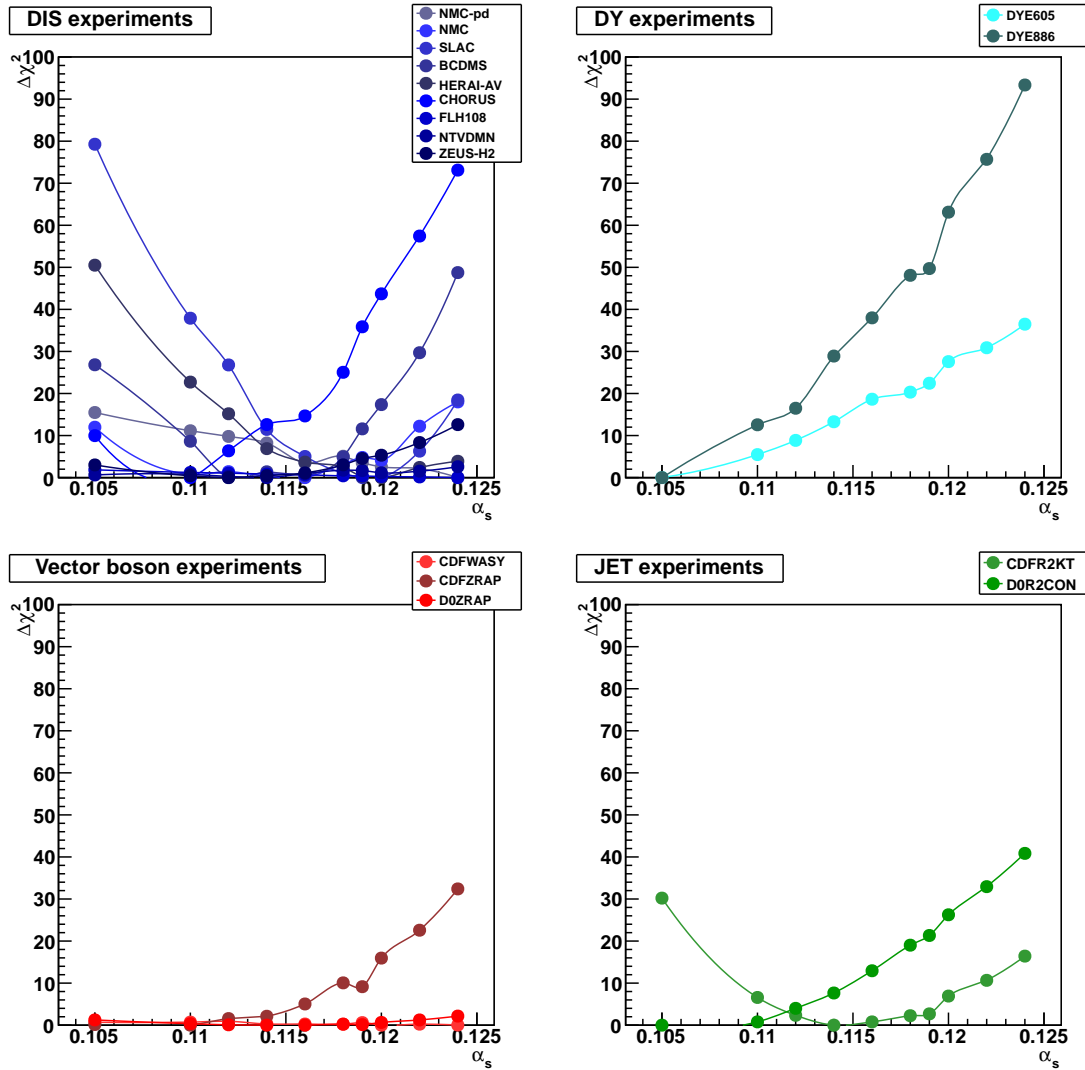


Figura 3.14:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento relativo al fit globale effettuato con NNPDF 2.0, raggruppati per classe di esperimenti e traslati in modo che il minimo di ciascuno coincida con lo zero. I dati per  $\alpha_s = 0.130$  non sono riportati al fine di non ridurre eccessivamente le scale.

$\alpha_s$	0.110	0.113	0.116	0.119	0.121	0.123
NMC-pd	254.83	236.43	230.37	221.22	216.15	214.39
NMC	458.79	445.87	429.86	415.04	410.85	406.38
SLAC	152.28	134.48	122.72	117.71	118.15	124.32
BCDMS	921.49	919.20	905.39	900.63	913.88	913.51
ZEUS	569.74	573.58	549.52	543.05	539.97	540.04
H1	681.64	678.77	659.99	648.65	641.21	635.70
CHORUS	1359.41	1340.33	1306.50	1285.60	1265.64	1265.12
FLH108	14.52	14.33	13.79	13.37	12.99	12.72
NTVDMN	52.49	52.37	51.08	51.22	53.66	54.33
ZEUS-H2	183.19	187.42	187.17	192.96	198.83	205.73
TOTALE	4648.38	4582.78	4456.39	4389.45	4371.33	4372.24

$\alpha_s$	0.125	0.128	0.130	0.135	0.140	$N_{dat}$
NMC-pd	199.76	190.03	175.02	235.33	272.28	153
NMC	401.20	391.44	387.89	397.32	426.65	245
SLAC	131.99	138.85	133.88	141.08	173.16	93
BCDMS	921.43	974.65	1035.47	1335.34	1605.13	581
ZEUS	547.65	559.88	567.80	633.07	818.80	507
H1	640.16	644.19	667.91	793.74	1187.57	632
CHORUS	1262.73	1252.54	1261.37	1450.66	1735.84	942
FLH108	12.54	12.24	12.36	13.20	14.58	8
NTVDMN	55.68	59.55	61.10	88.62	117.98	84
ZEUS-H2	214.78	233.35	246.46	295.11	368.06	127
TOTALE	4387.92	4456.72	4549.26	5383.47	6720.05	3372

Tabella 3.1:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento, dati ottenuti con 500 repliche usando NNPDF 1.2 [9].

$\alpha_s$	0.105	0.110	0.112	0.114	0.116	0.118
NMC-pd	137.05	134.52	135.23	132.71	132.32	132.30
NMC	417.73	412.73	412.58	412.86	410.59	414.05
SLAC	167.17	150.80	145.05	137.92	132.61	128.56
BCDMS	715.37	717.28	713.59	720.42	724.58	730.51
HERAI-AV	660.29	654.45	653.66	656.24	657.34	667.05
CHORUS	1044.57	1037.26	1040.64	1038.87	1039.78	1047.80
FLH108	13.77	13.03	12.76	12.54	12.32	12.24
NTVDMN	63.43	59.89	60.25	60.06	60.30	59.62
ZEUS-H2	151.45	151.03	151.75	152.05	153.79	155.79
TOTALE	3370.83	3330.99	3325.51	3323.67	3323.63	3347.92

$\alpha_s$	0.119	0.120	0.122	0.124	0.130	$N_{dat}$
NMC-pd	131.42	131.55	131.48	132.01	131.56	153
NMC	412.62	413.28	416.16	416.03	416.77	245
SLAC	126.49	127.82	129.09	133.20	150.74	93
BCDMS	736.38	741.08	758.31	775.00	852.57	581
HERAI-AV	666.59	666.39	675.18	686.55	736.69	608
CHORUS	1054.72	1050.70	1062.50	1083.04	1113.45	942
FLH108	12.09	11.95	11.89	11.79	11.27	8
NTVDMN	60.60	60.43	60.31	60.89	61.33	84
ZEUS-H2	156.81	158.14	161.77	165.49	184.73	127
TOTALE	3357.72	3361.34	3406.69	3464.00	3659.11	2841

Tabella 3.2:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento, dati ottenuti con 500 repliche mediante NNPDF 2.0 considerando solo esperimenti DIS.

$\alpha_s$	0.105	0.110	0.112	0.114	0.116	0.118
NMC-pd	165.21	160.87	159.52	157.95	153.21	154.81
NMC	422.49	411.26	411.92	410.80	410.51	413.73
SLAC	203.33	161.96	150.85	135.52	129.08	125.08
BCDMS	759.91	741.73	733.08	734.46	733.58	738.00
HERAI-AV	733.24	705.44	697.91	689.62	686.41	685.17
CHORUS	1089.89	1079.91	1086.28	1092.52	1094.57	1104.95
FLH108	13.49	12.87	12.69	12.49	12.31	12.06
NTVDMN	54.94	55.08	54.61	54.32	55.28	56.07
ZEUS-H2	156.22	153.65	153.21	153.68	154.33	156.24
DYE605	79.16	84.63	88.01	92.44	97.80	99.48
DYE886	197.42	209.98	213.91	226.32	235.41	245.52
CDFWASY	24.18	24.21	24.40	23.76	23.75	23.69
CDFZRAP	45.70	45.55	47.12	47.67	50.59	55.61
D0ZRAP	16.64	15.74	15.48	15.40	15.39	15.65
CDFR2KT	86.24	62.62	58.37	56.03	56.81	58.28
D0R2CON	79.57	80.35	83.57	87.22	92.51	98.59
TOTALE	4127.63	4005.85	3990.93	3990.20	4001.54	4042.93
$\alpha_s$	0.119	0.120	0.122	0.124	0.130	$N_{dat}$
NMC-pd	153.26	152.29	151.87	149.73	149.17	153
NMC	415.30	414.61	422.73	428.51	447.51	245
SLAC	124.06	124.12	130.35	142.51	210.57	93
BCDMS	744.67	750.44	762.78	781.83	886.06	581
HERAI-AV	682.91	682.73	685.14	686.61	774.77	608
CHORUS	1115.77	1123.61	1137.35	1153.03	1245.28	942
FLH108	12.03	11.90	11.80	11.64	11.73	8
NTVDMN	55.99	55.46	55.85	56.91	59.47	84
ZEUS-H2	157.75	158.53	161.55	165.81	186.04	127
DYE605	101.60	106.74	110.04	115.64	131.51	119
DYE886	247.13	260.54	273.10	290.78	362.66	199
CDFWASY	24.09	23.48	23.72	23.51	22.29	13
CDFZRAP	54.70	61.50	68.13	77.95	112.27	29
D0ZRAP	15.52	16.04	16.63	17.55	21.29	28
CDFR2KT	58.72	62.95	66.69	72.45	106.83	76
D0R2CON	100.90	105.82	112.51	120.42	157.55	110
TOTALE	4064.40	4110.76	4190.24	4294.88	4885.00	3415

Tabella 3.3:  $\chi^2(\alpha_s)$  per esperimento, dati ottenuti con 500 repliche mediante NNPDF 2.0 considerando tutti gli esperimenti.

# Appendice A

## Studio degli stimatori

### A.1 Osservazioni generali

Allo scopo di discutere la qualità delle procedure che devono essere studiate, è utile conoscere i valori esatti che tali algoritmi dovrebbero riprodurre; nel corso di questo studio è stato scelto di porre

$$\alpha_s^{(true)} = 0.118; \quad \sigma_{exp}^{(true)} = 0.002. \quad (\text{A.1})$$

Nel seguito vengono sinteticamente analizzate le proprietà di ciascun metodo in diversi casi che si differenziano per la scelta dei valori di  $\alpha_s$  in corrispondenza dei quali si hanno valutazioni (fittizie) del  $\chi^2$ . I punti artificiali sono stati generati aggiungendo fluttuazioni pseudo-casuali gaussiane di ampiezza  $\sigma_F$  ad un andamento parabolico esatto che produce i valori di cui sopra. Per ciascuna situazione considerata viene riportata una figura con degli istogrammi rappresentativi delle popolazioni di stime ricavate nel corso di 1000 simulazioni, oltre ad una tabella con i valori medi per queste popolazioni del bias  $b$ , della radice  $\sigma$  della varianza e della radice RMSE dell'errore quadratico medio, per diversi valori delle fluttuazioni.

Più precisamente, gli istogrammi riportati nelle figure rappresentano il numero di volte ( $n$  in ordinata) che è stata ottenuta, su 1000 simulazioni, una stima del minimo pari ad  $\alpha_s$  (in ascissa). In ciascuna riga il valore di  $\sigma_F$  è costante: i risultati dei diversi metodi sono stati separati in tre diverse colonne per consentire una migliore lettura dei grafici. Ogni colore contraddistingue una procedura come segue:

- il verde individua il metodo dei minimi quadrati;
- in blu sono riportati gli istogrammi relativi al metodo dei quattro punti: la linea più chiara rappresenta le medie ottenute con i tagli di cui nella sezione 3.2.1, quella più scura le medie pesate mentre la tonalità intermedia si riferisce alle medie aritmetiche usuali;
- al colore rosso è associato il metodo dei tre punti, le diverse sfumature individuano le tre varianti come al punto precedente.

## A.2 Analisi degli stimatori per i minimi

### A.2.1 Primo caso: punti centrati distribuiti in modo uniforme.

Il primo insieme considerato contiene i punti

$$\{0.108, 0.110, 0.112, 0.114, 0.116, 0.118, 0.120, 0.122, 0.124, 0.126, 0.128\};$$

esso copre quindi in modo uniforme un intervallo centrato attorno al punto di minimo.

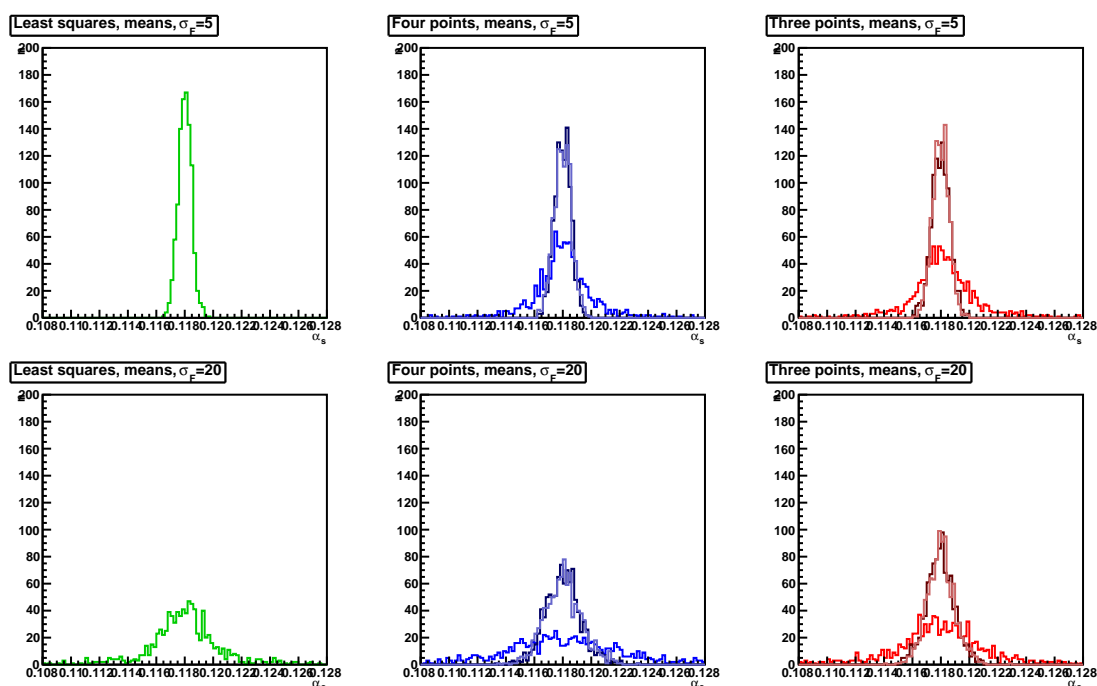


Figura A.1: istogrammi raffiguranti la popolazione delle stime per la posizione del minimo al variare dell'ampiezza delle fluttuazioni, per un insieme di punti centrato attorno al valore vero con densità uniforme.

Dagli istogrammi si può notare che in questo caso tutti gli stimatori statistici considerati sono corretti, cioè che tutte le distribuzioni sono centrate attorno al valore vero della grandezza che deve essere determinata. Le procedure dei tre e dei quattro punti che utilizzano la media aritmetica standard corrispondono a popolazioni di stime la cui varianza è sempre maggiore di quella che presenta il metodo dei minimi quadrati per il medesimo valore delle fluttuazioni; pertanto essi non sono utili perché inefficienti. È inoltre importante osservare che, mentre per piccole fluttuazioni la distribuzione più piccata sul valore reale è quella del metodo dei minimi quadrati, quando l'incertezza sui punti è grande il metodo dei tre punti con tagli o

media pesata è il più efficiente; il metodo dei quattro punti si colloca invece sempre in una posizione intermedia fra gli altri due, come del resto ci si poteva aspettare. Si noti per inciso che le due varianti proposte per le procedure con tre o quattro punti sono in questo caso essenzialmente equivalenti.

### A.2.2 Secondo caso: punti centrati distribuiti in modo non uniforme.

Il secondo set di valori per  $\alpha_s$  considerato è

$$\{0.108, 0.112, 0.114, 0.116, 0.118, 0.120, 0.123, 0.124, 0.125, 0.126, 0.128\};$$

esso spazza sempre un intervallo centrato attorno al minimo, ma con densità non uniforme e leggermente spostata verso destra.

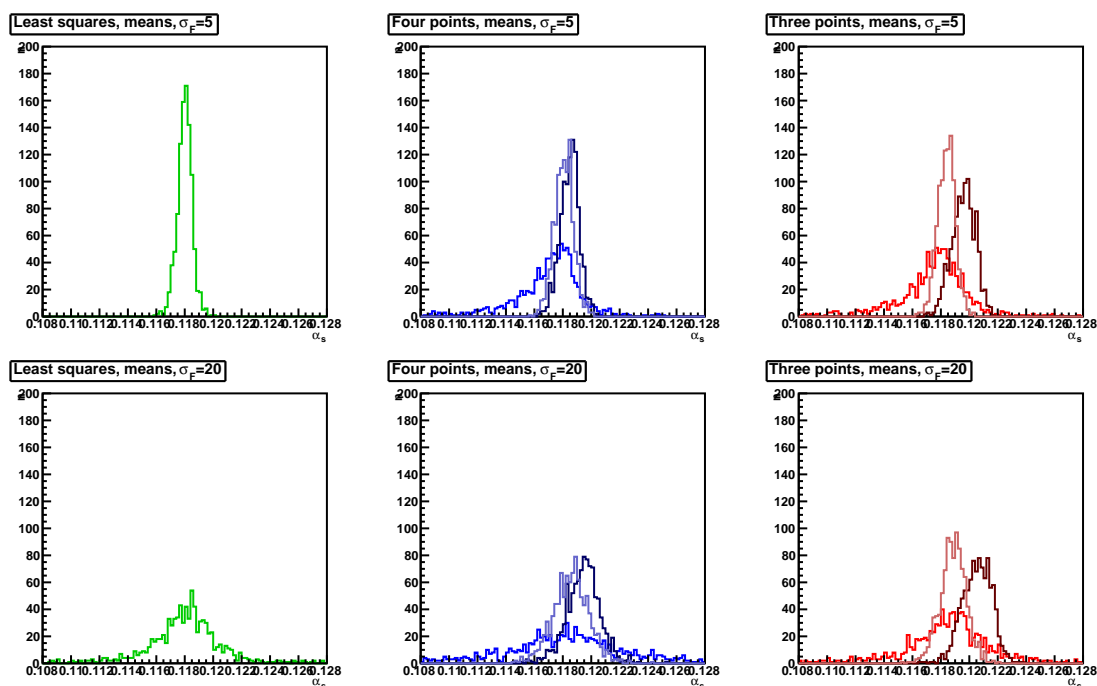


Figura A.2: istogrammi raffiguranti la popolazione delle stime per la posizione del minimo al variare dell'ampiezza delle fluttuazioni, per un insieme di punti centrato attorno al valore vero con densità non uniforme.

Dai grafici in figura A.2 si può notare come pesare le medie comporti un forte bias verso la zona di densità più elevata; ciò accade poiché viene data maggiore importanza alle parabole strette, le quali possono essere conseguenza di fluttuazioni ampie in punti vicini. Nel caso delle medie con tagli lo stesso effetto è presente ma è di gran lunga ridotto: questa caratteristica rende preferibile eliminare i minimi lontani dall'intervallo di interesse rispetto a pesare tutte le stime considerando come

incertezza la semiampiezza delle corrispondenti parabole. Lo stimatore dato dal metodo dei minimi quadrati rimane corretto ma comunque poco efficiente nel caso di incertezze grandi.

### A.2.3 Terzo caso: punti non centrati distribuiti in modo uniforme.

Nel terzo ed ultimo insieme analizzato i punti tornano ad essere equispaziati ma sono decentrati rispetto al punto di minimo: essi infatti sono

$$\{0.112, 0.114, 0.116, 0.118, 0.120, 0.122, 0.124, 0.126, 0.128, 0.130, 0.132\}.$$

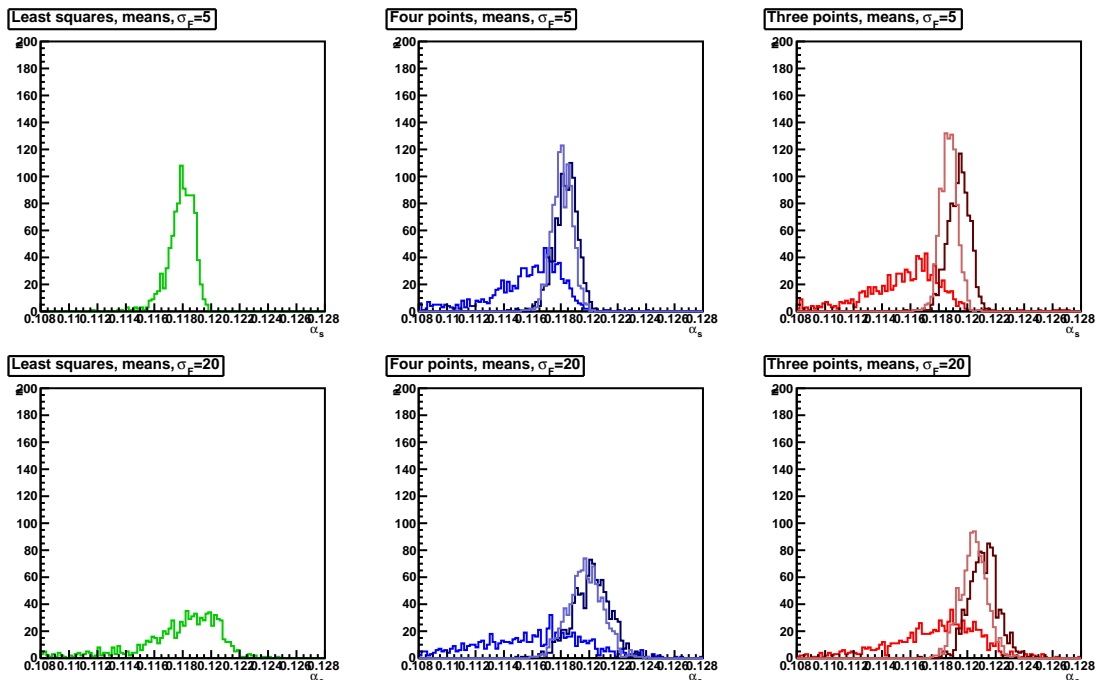


Figura A.3: istogrammi raffiguranti la popolazione delle stime per la posizione del minimo al variare dell'ampiezza delle fluttuazioni, per un insieme di punti decentrato rispetto al valore vero e avente densità uniforme.

Gli istogrammi riportati in figura A.3 evidenziano una scarsa efficienza del metodo dei minimi quadrati nelle condizioni considerate. Le distribuzioni relative alle medie pesate con il metodo dei tre punti sono relativamente più strette, specie nel caso di grandi fluttuazioni, ma a fronte di una sostanziale parità per quanto riguarda la varianza la procedura con tagli presenta un bias minore. La procedura dei quattro punti sembra essere in questo caso leggermente più stabile delle altre secondo il criterio del minimo MSE.

## Primo caso

$\sigma_F$		Minimi quadrati	Quattro punti			Tre punti		
			standard	pesato	con tagli	standard	pesato	con tagli
5	$b$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	+0.0001	0.0000	0.0000
	$\sigma$	0.0005	0.0021	0.0006	0.0006	0.0023	0.0006	0.0006
	RMSE	0.0005	0.0021	0.0006	0.0006	0.0023	0.0006	0.0006
10	$b$	0.0000	+0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	$\sigma$	0.0012	0.0031	0.0009	0.0010	0.0030	0.0008	0.0008
	RMSE	0.0012	0.0031	0.0009	0.0010	0.0030	0.0008	0.0008
15	$b$	+0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	+0.0001	0.0000	0.0000
	$\sigma$	0.0020	0.0038	0.0011	0.0012	0.0031	0.0009	0.0009
	RMSE	0.0020	0.0038	0.0011	0.0012	0.0031	0.0009	0.0009
20	$b$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	+0.0002	0.0000	0.0000
	$\sigma$	0.0025	0.0038	0.0013	0.0013	0.0031	0.0010	0.0010
	RMSE	0.0025	0.0038	0.0013	0.0013	0.0031	0.0010	0.0010

## Secondo caso

$\sigma_F$		Minimi quadrati	Quattro punti			Tre punti		
			standard	pesato	con tagli	standard	pesato	con tagli
5	$b$	0.0000	-0.0010	+0.0005	+0.0001	-0.0005	+0.0016	+0.0004
	$\sigma$	0.0005	0.0023	0.0007	0.0007	0.0025	0.0008	0.0006
	RMSE	0.0005	0.0025	0.0008	0.0007	0.0025	0.0018	0.0007
10	$b$	0.0000	-0.0005	+0.0009	+0.0003	+0.0002	+0.0022	+0.0007
	$\sigma$	0.0014	0.0032	0.0010	0.0010	0.0028	0.0009	0.0008
	RMSE	0.0014	0.0032	0.0014	0.0011	0.0028	0.0024	0.0011
15	$b$	0.0000	-0.0002	+0.0012	+0.0005	+0.0005	+0.0024	+0.0008
	$\sigma$	0.0021	0.0036	0.0011	0.0011	0.0031	0.0010	0.0009
	RMSE	0.0021	0.0036	0.0016	0.0012	0.0031	0.0026	0.0012
20	$b$	0.0000	+0.0002	+0.0014	+0.0006	+0.0004	+0.0025	+0.0009
	$\sigma$	0.0026	0.0039	0.0012	0.0013	0.0030	0.0010	0.0009
	RMSE	0.0026	0.0039	0.0019	0.0014	0.0030	0.0027	0.0013

## Terzo caso

$\sigma_F$		Minimi quadrati	Quattro punti			Tre punti		
			standard	pesato	con tagli	standard	pesato	con tagli
5	$b$	-0.0001	-0.0024	+0.0004	+0.0001	-0.0024	+0.0014	+0.0007
	$\sigma$	0.0009	0.0025	0.0008	0.0007	0.0027	0.0008	0.0006
	RMSE	0.0009	0.0034	0.0009	0.0007	0.0036	0.0016	0.0009
10	$b$	-0.0004	-0.0030	+0.0011	+0.0007	-0.0021	+0.0024	+0.0015
	$\sigma$	0.0021	0.0031	0.0012	0.0009	0.0030	0.0010	0.0008
	RMSE	0.0021	0.0043	0.0016	0.0012	0.0037	0.0026	0.0017
15	$b$	-0.0004	-0.0025	+0.0017	+0.0013	-0.0011	+0.0028	+0.0020
	$\sigma$	0.0026	0.0035	0.0013	0.0011	0.0033	0.0010	0.0009
	RMSE	0.0027	0.0043	0.0021	0.0017	0.0035	0.0030	0.0022
20	$b$	-0.0002	-0.0019	+0.0021	+0.0017	-0.0002	+0.0031	+0.0024
	$\sigma$	0.0029	0.0037	0.0013	0.0012	0.0032	0.0010	0.0009
	RMSE	0.0029	0.0041	0.0025	0.0021	0.0032	0.0033	0.0026

Tabella A.1: Bias, varianza e MSE delle popolazioni di stime per il minimo al variare delle fluttuazioni.

# Bibliografia

- [1] R. Abbate, M. Fickinger, A.H. Hoang, V. Mateu, and I.W. Stewart, *Thrust at  $N^3LL$  with Power Corrections and a Precision Global Fit for  $\alpha_s(m_Z)$* , Arxiv preprint arXiv:1006.3080 (2010).
- [2] R.D. Ball, L. Del Debbio, S. Forte, A. Guffanti, J.I. Latorre, A. Piccione, J. Rojo, and M. Ubiali, *A determination of parton distributions with faithful uncertainty estimation*, Nuclear Physics B **809** (2009), no. 1-2, 1–63.
- [3] ———, *Precision determination of electroweak parameters and the strange content of the proton from neutrino deep-inelastic scattering*, Arxiv preprint arXiv:0906.1958 (2009).
- [4] R.D. Ball, L. Del Debbio, S. Forte, A. Guffanti, J.I. Latorre, J. Rojo, and M. Ubiali, *A first unbiased global NLO determination of parton distributions and their uncertainties*, arXiv **1002**.
- [5] R. Brun and F. Rademakers, *ROOT—An object oriented data analysis framework*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment **389** (1997), no. 1-2, 81–86.
- [6] G.D. Coughlan and J.E. Dodd, *The ideas of particle physics: an introduction for scientists*, Cambridge Univ Pr, 1991.
- [7] G. Cowan, *Statistical data analysis*, Oxford University Press, USA, 1998.
- [8] A. Das and T. Ferbel, *Introduction to nuclear and particle physics*, World Scientific Pub Co Inc, 2003.
- [9] E. Mariani, *Determination of the strong coupling from an unbiased global parton fit*, Undergraduate Thesis, Milan University (2009).
- [10] K. Nakamura and (Particle Data Group), *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** (2010).
- [11] W. Tung, *Bjorken scaling*, Scholarpedia **4** (2009), no. 3, 7412.